van der Waerden, B. L.

Moderne Algebra. II. Teil. Unter Benutzung von Vorlesungen von E. Artin und E. Noether. (German) Zbl 0002.00804

Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete. Bd. 34. Berlin: Julius Springer. vii, 216 S. (1931).

Im ersten Kapitel (Eliminationstheorie) wird die Sylverstersche Resultante zweier Polynome definiert und ihre Bedeutung für das Vorhandensein gemeinsamer Nullstellen auseinandergesetzt; es schließt sich an die Darstellung als symmetrische Funktion der Wurzeln sowie ein Abschnitt über Resultantensysteme mehrerer Polynome einer Unbestimmten. Betrachtungen über die Bestimmung aller gemeinsamen Nullstellen beliebig vieler Polynome in n Unbestimmten gipfeln in dem Hilbertschen Nullstellensatz, der hier ohne idealtheoretische Hilfsmittel bewiesen wird. Für ein homogenes Gleichungssystem folgt ein algebraisches Kriterium (Herleitung nach H. Kapferer) für die Existenz nichttrivialer Lösungen. Ausführungen über Trägheitsformen leiten über zu den Eigenschaften der Resultante von n allgemeinen Formen in n Unbestimmten; sie dienen neben dem Hilbertschen Nullstellensatz zum Beweis des Satzes von Bézout.

Das XII. Kapitel über allgemeine Idealtheorie kommutativer Ringe bringt eine Darstellung der E. Noetherschen Theorie (publiziert in [Math. Ann. 83, 24–66 (1921; JFM 48.0121.03)]) mit dem Hauptsatz über die Zerlegung eines Ideals in endlich viele größte Primärkomponenten. Hervorzuheben ist noch ein besonderer Abschnitt über einartige Ideale.

Kap. XIII: Anwendung dieser allgemeinen Theorie auf den Polynombereich von n Unbestimmten. Über algebraische Mannigfaltigkeiten werden die Grundtatsachen abgeleitet und ihre Parameterdarsteliung durch algebraische Funktionen untersucht; insbesondere wird der Zusammenhang zwischen irreduziblen Mannigfaltigkeiten, Primidealen des Polynombereichs und den allgemeinen Nullstellen gewonnen. Betrachtungen über die Dimension der Mannigfaltigkeiten vervollständigen diese Gedankenreihen. Der Satz von der Zerlegbarkeit einer algebraischen Mannigfaltigkeit in irreduzible liefert einen neuen Beweis des Hilbertschen Nullstellensatzes. Es schließt an die Verallgemeinerung des M. Noetherschen Fundamentalsatzes samt Folgerungen, unter denen vor allem der Restsatz zu erwähnen ist. Die Methode der Reduktion mehrdimensionaler Ideale auf nulldimensionale liefert den Hentzeltschen Nullstellensatz [*K. Hentzelt*, Math. Ann. 88, 53–79 (1922; JFM 48.0094.03) (bearb. von E. Noether)]. Das Kapitel endet mit einem Satz über ungemischte Ideale: „Hat das Ideal $(f_1, \dots, f_r) \neq \mathfrak{o} = \prod[x_1, \dots, x_n]$ eine Dimension $d \leq n - r$, so ist es ungemischt $(n - r)$-dimensional", sowie mit Betrachtungen über den Grad einer algebraischen Mannigfaltigkeit in ihrem Zusammenhang mit der Anzahl von Schnittpunkten mit linearen Unterräumen.

Im XIV. Kap. wird die Theorie der ganzen algebraischen Größen entwickelt in der Form, wie sie in der grundlegenden Arbeit von *E. Noether* [Math. Ann. 96, 26–61 (1926; JFM 52.0130.01)] zuerst durchgeführt und dann anschließend von Krull, Artin, Brandt weitergebildet und auch auf hyperkomplexe Systeme ausgedehnt wurde. So ist das van der Waerdensche Buch das erste, das den modernen axiomatischen Aufbau der gewöhnlichen Idealtheorie wiedergibt. Daran anschließend findet sich eine in der vorliegenden Form von E. Artin stammende und hier zum erstenmal mitgeteilte Idealtheorie beliebiger ganz abgeschlossener Integritätsbereiche, auch solcher ohne die bekannte Minimalbedingung.

Das Kap. XV, „Lineare Algebra", bildet die Überleitung zu den hyperkomplexen Systemen und der Darstellungstheorie. Zunächst eine ausführliche Theorie der linearen Transformationen, die aufgefaßt werden als operatorhomomorphe Modul-Abbildungen, dann, auf dem Steinitzschen Austauschsatz ruhend, die Lehre von den linearen Gleichungen. Für Matrizen mit Elementen aus solchen Ringen, die einen Euklidischen Divisionsalgorithmus oder die Hauptidealeigenschaft besitzen, wird die Reduktion auf die Elementarteilerdiagonalform behandelt. Damit erhält man unmittelbar den Fundamentalsatz der Abelschen Gruppen mit endlich viel Erzeugenden und einem Ring eines der beiden genannten Typen als Operatorenbereich; für Gruppen mit endlich vielen Elementen wird noch ein besonderer Beweis durch Induktion nach der Elementeanzahl gegeben. Die Beziehungen zwischen der gruppentheoretischen Struktur des Darstellungsmoduls und derjenigen der von ihm erzeugten Darstellungen dienen zur Behandlung der Aufgabe, Matrizen mit Elementen aus einem kommutativen Körper auf die Loewysche und Jordansche Normalform zu transformieren. Die enge Verbindung mit der Elementarteilertheorie im Polynombereich einer Unbestimmten gibt ein Mittel zur wirklichen Konstruktion dieser Normalformen. Mit der Transformation quadratischer und Hermitescher Formen auf Diagonalform schließt der Teil „Lineare Algebra".

Die beiden letzten Kapitel sind der Theorie der hyperkomplexen Systeme und ihren Darstellungen gewidmet. Zunächst handelt es sich um die Struktur der hyperkomplexen Systeme selbst. Für beliebige nichtkommutative Ringe werden die erforderlichen gruppen- und idealtheoretischen Begriffe entwickelt. Der Hauptsatz für die halbeinfachen Ringe liefert die Identität der linksseitig vollreduziblen Ringe mit Einselement und derjenigen ohne Radikal mit Minimalbedingung für Linksideale. Es folgt der Zusammenhang zwischen den Zerlegungen in zweiseitige Ideale und denen des Zentrums. Untersuchungen über den Automorphismenring eines vollständig reduziblen Moduls bilden die Vorbereitung zum Wedderburnschen Satz über die Struktur der halbeinfachen Ringe und dessen Umkehrung, durch den die Bauart dieser Systeme auf die der vollen Matrizenringe in gewissen nichtkommutativen Körpern zurückgeführt wird. Sätze über das Verhalten hyperkomplexer Systeme bei Erweiterung des Grundkörpers beschließen das XVI. Kapitel; es handelt sich da u. a. um den, wichtigen Satz, daß ein nichtkommutativer Körper endlichen Ranges bezüglich seines Zentrums stets eine Quadratzahl als Rang besitzt und bei geeigneter Erweiterung des Zentrums als voller Matrizenring betrachtet werden kann, sowie um die Definition des Zerfällunskörpers.

Im XVII. Kapitel wird die Darstellung hyperkomplexer Systeme und (mittels des zu einer endlichen Gruppe konstruierten Gruppenringes) auch die der endlichen Gruppen behandelt. Zunächst ergibt sich die vollständige Reduzibilität aller Darstellungen eines hyperkomplexen Systems ohne Radikal $\mathfrak{c}$ und die Tatsache, daß bei einem beliebigen hyperkomplexen System $\mathfrak{o}$ alle irreduziblen Darstellungen schon in der regulären Darstellung von $\mathfrak{o} \mid \mathfrak{c}$ enthalten sind. Die Diskussion der Struktur der Darstellungen einfacher hyperkomplexer Systeme liefert den Burnsideschen Satz über die n^2 linear unabhängigen Matrizen in einem absolut irreduziblen System von Matrizen n-ten Grades. Es folgen Sätze über die Zentrumsdarstellungen, vor allem der über die Anzahl der inäquivalenten Darstellungen, unter denen des ganzen Systems sowie Betrachtungen über Spuren und Charaktere (Hauptresultat: die bis auf Äquivalenz eindeutige Bestimmtheit einer vollständig reduziblen Darstellung eines hyperkomplexen Systems mit einem Koeffizientenkörper der Charakteristik Null durch die Charaktere). Ausführungen über die Darstellung Abelscher Gruppen und ihre Charakterentheorie schließen sich an. Weiter wird die volle Reduzibilität der Darstellungen endlicher Gruppen bewiesen und gezeigt, daß die Anzahl der inäquivalenten absolut-irreduziblen Darstellungen gleich der Anzahl der Klassen konjugierter Elemente ist. Nach Ableitung der Charakterenrelationen werden die Darstellungen der symmetrischen Gruppe behandelt (nach J. von Neumann). Zum Schluß finden sich Anwendungen der Darstellungstheorien auf die Theorie der nichtkommutativen Körper; u. a. wird, bewiesen, daß die maximalen kommutativen Unterkörper von Divisionsalgebren Zerfällungskörper darstellen. Als Anwendung dieser Gedanken wird die Bestimmung aller nichtkommutativen Körper endlichen Grades über dem Körper der reellen Zahlen sowie die der Körper aus endlich vielen Elementen durchgeführt; dabei ergibt sich ein neuer Beweis des Wedderburnschen Satzes, daß alle Körper mit endlich viel Elementen kommutativ sind. Die allerorten mit ganz besonderer Sorgfalt ausgesuchten Aufgaben sind noch ausdrücklich zu erwähnen.

Reviewer: Heinrich Grell (Jena)

For a scan of this review see the web version.

MSC:

13-01	Introductory exposition (textbooks, tutorial papers, etc.) pertaining to commutative algebra
14-01	Introductory exposition (textbooks, tutorial papers, etc.) pertaining to algebraic geometry
15-01	Introductory exposition (textbooks, tutorial papers, etc.) pertaining to linear algebra
16-01	Introductory exposition (textbooks, tutorial papers, etc.) pertaining to associative rings and algebras
20-01	Introductory exposition (textbooks, tutorial papers, etc.) pertaining to group theory
00A05	Mathematics in general

Keywords:

algebra