

**Birkhoff, Garrett**

**Lattice theory. Rev. ed.** (English) Zbl 0033.10103

American Mathematical Society Colloquium Publications. 25. New York: American Mathematical Society (AMS). viii, 285 p. (1948).

Die vorliegende zweite Auflage trägt der raschen Weiterentwicklung der Theorie während der letzten zehn Jahre voll Rechnung. Die neue Literatur ist sorgfältig verwertet, die wichtigsten Ergebnisse werden teils im Text, teils in Form von Übungen gebracht, und in den Fußnoten werden fast alle bisher erschienenen Arbeiten zitiert. Auf diese Weise wird eine enzyklopädische Vollständigkeit erzielt. Eine Reihe eigener Ergebnisse wird zum ersten Mal mitgeteilt, über 100 noch ungelöste Probleme werden aufgezählt.

Der Inhalt: Das „Foreword on algebra“ bringt den Begriff der allgemeinen Algebra mit mehreren Operationen, die Kongruenzrelationen darin und die freie Algebra, das „Foreword on topology“ neben den üblichen topologischen Grundbegriffen die Konvergenz von gerichteten Mengen.

Kap. I. Partly ordered sets.

Begriff der bezüglich  $\geq$  teilweise geordneten Menge  $S$ . Eine Abbildung von  $S$  auf  $S'$  heißt isotone; wenn aus  $x \geq y$  stets  $x' \geq y'$  folgt. Addition, Multiplikation und Potenzierung solcher Systeme  $S$ . Die Jordan-Delekinsche Kettenbedingung und ihre Folgen. Einordnung der Konfigurationen, Zusammenhang mit topologischen Begriffen. Möbiusfunktion endlicher  $S$ .

Kap. II. Lattices.

Verschiedene Definitionsmöglichkeiten, Ideale, Kongruenzrelationen. Komplementäre Verbände. Satz von Dilworth: Jeder relativ komplementäre Verband ist direktes Produkt einfacher solcher Verbände. Zentrum eines Verbandes, neutrale Elemente, Konstruktion des freien Verbandes mit beliebig vielen Erzeugenden.

Kap. III. Chains and chain conditions.

Kette = geordnete Menge. Darstellung der Theorie der wohlgeordneten Mengen mit verbandstheoretischen Begriffen. Für das Auswahlaxiom werden 5 äquivalente Formulierungen abgeleitet, darunter der Wohlordnungssatz und der Satz von Zorn. Topologie der Ketten.

Kap. IV. Complete lattices.

Vollständige und bedingt vollständige Verbände,  $\sigma$ -Verbände. Fixpunktsatz: Ist  $f(x)$  eine isotone Abbildung eines vollständigen Verbandes in sich, so gibt es ein  $a = f(a)$ . Ein allgemeiner Polaritätsbegriff wird eingeführt und der Galois'sche Zusammenhang zwischen vollständigen Verbänden  $L$  und  $M$ , der einen dualen Isomorphismus zwischen den Verbänden der abgeschlossenen Teilmengen von  $L$  und  $M$  ergibt. Einbettung einer teilweise geordneten Menge  $M$  in einen vollständigen Verband durch Hinzunahme der Schnitte (Mac Neille). Einführung der Ordnungstopologie und der Sterntopologie in Verbänden. Topologische Verbände.

Kap. V. Modular lattices.

Ihre verschiedenen Charakterisierungen. Der freie modulare Verband. Der aus zwei endlichen Ketten zwischen 0 und 1 erzeugte freie modulare Verband ist ein endlicher distributiver Verband. Bewertungen [reelle Funktionen  $v(x)$  mit  $v(x) + v(y) = v(x \cap y) + v(x \cup y)$ ]. Bestimmung aller Bewertungen eines modularen Verbandes endlicher Länge. Metrische Verbände, Zusammenhang der Metrik mit der Ordnungstopologie. Die Jordanzerlegung einer Bewertung beschränkter Variation in zwei monotone Summanden.

Kap. VI. Applications to algebra.

Vertauschbare Kongruenzrelationen auf allgemeinen Algebren. Neue Formulierung des Satzes von Jordan-Hölder als Satz über Ketten von Kongruenzrelationen auf gewissen Algebren. Enthält die Sätze der Gruppentheorie, aber auch noch Verallgemeinerungen auf gewisse Quasigruppen (loops). Subdirekte Vereinigung von Algebren. Satz von Kurosch-Ore über die Zerlegung der Elemente eines modularen Verbandes in irreduzible Komponenten. Satz von Ore über die Darstellung als direkte Vereinigung unzerlegbarer Elemente. Die Verbände der Untergruppen einer Gruppe in ihrem Zusammenhang mit den Eigenschaften der Gruppen.

#### Kap. VII. Semi-modular lattices.

Verschiedene Charakterisierungen und Eigenschaften. Die projektiven und affinen Geometrien über Ringen als Verbände. Rang und lineare Abhängigkeit. Matroide Verbände, Partitionsverbände. Als Beispiele matroider Verbände: Die algebraisch abgeschlossenen Teilkörper eines Körpers, die ebenen affinen und projektiven Geometrien.

#### Kap. VIII. Complemented modular lattices.

Axiomatische Einführung der projektiven Geometrien. Perspektivität und Projektivität in Verbänden. Zerlegung eines komplementären modularen Verbandes endlicher Länge in einfache. Kollineationen und Korrelationen der projektiven Geometrien. Orthokomplementäre modulare Verbände. Bericht über die von Neumannschen Resultate über kontinuierlich dimensionale projektive Geometrien und reguläre Ringe. Satz von Frink: Jeder komplementäre modulare Verband ist isomorph einem Teilverband der direkten Vereinigung atomischer projektiver Geometrien.

#### Kap. IX. Distributive lattices.

Verschiedene Charakterisierungen, u. a. mit der Operation  $(a, b, c) = (a \cap b) \cup (b \cap c) \cup (c \cap a)$ . Darstellung durch Mengenringe. Primideale. Eindeutigkeit der Zerlegung in irreduzible Elemente. Ein vollständiger distributiver Verband ist ein topologischer Verband, wenn  $x \cap \bigvee_{y \in \beta} y = \bigvee_{y \in \beta} (x \cap y)$  stets gilt. Pseudokomplementäre Verbände. Distributive Bewertungen gehören zu distributiven metrischen Verbänden.

#### Kap. X. Boolean algebras.

Boolesche Ringe. Das Newmansche Axiomensystem für Boolesche Algebren. Ideale und Kongruenzen, freie Boolesche Verbände. Boolesche Gleichungen. Verallgemeinertes distributives Gesetz. Satz von Loomis: Jede Boolesche  $\sigma$ -Algebra ist  $\sigma$ -homomorphes Bild eines  $\sigma$ -Mengenkörpers. Maßalgebra heißt eine Boolesche Algebra, in der ein abzählbar additives Maß  $\nu(x)$  erklärt ist. Jede separable Maßalgebra ist isometrisch isomorph einer Teilalgebra einer eindeutig bestimmten vollständigen separablen Maßalgebra ohne Punkte mit  $\nu(I) = 1$ . Verbände mit eindeutigen Komplementen.

#### Kap. XI. Applications to set theory.

Ergebnisse von Wallman. Der Stonesche Zusammenhang zwischen Booleschen Algebren und totalunzusammenhängenden kompakten  $T_1$ -Räumen. Satz von Kaplansky: Jeder kompakte Hausdorffsche Raum ist bis auf Homöomorphie durch den Verband seiner stetigen Funktionen bestimmt. Boolesche Algebren mit einer Kuratowskischen Abschließungsoperation. Die abstrakte Maßtheorie von Carathéodory. Boolesche Algebren, in denen kein abzählbar additives Maß eingeführt werden kann.

#### Kap. XII. Applications to logic and probability.

Booles Aussagenalgebra. Logik der klassischen und der Quantenmechanik. Brouwersche Logik. Wahrscheinlichkeitsalgebra erklärt als Maßalgebra mit  $\nu(I) = 1$ .

#### Kap. XIII. Lattice-ordered semigroups.

Es wird eine zusätzliche Multiplikation der Verbandselemente eingeführt und das Rechtsresidual  $h : k$  als das größte  $x$  mit  $xk \leq h$  eingeführt. Residuierte Verbände sind solche, in denen stets Rechts- und Linksresiduale existieren. Ihre auf Dilworth und Ward zurückgehende, die Dedekindsche Idealtheorie verallgemeinernde Theorie. Relationsalgebren, Boolesche Matrizen.

#### Kap. XIV. Lattice-ordered groups.

Ihre Theorie wird ausführlich dargestellt, speziell die der geordneten, der archimedisch geordneten, der vollständigen  $l$ -Gruppen und der gerichteten Gruppen. Abgeschlossene Ideale in vollständigen  $l$ -Gruppen. Jede vollständige  $l$ -Gruppe ist kommutativ. Weitere Struktursätze.

#### Kap. XV. Vector lattices.

Ihre auf Kantorovich und Freudenthal zurückgehende Theorie wird entwickelt. Banachverbände, abstrakte  $(L)$ -Räume und ihre Darstellung nach Kakutani. Die Spektraldarstellung der Elemente eines  $\sigma$ -vollständigen Vektorverbandes.

#### Kap. XVI. Ergodic theory.

Ihre Sätze werden in Banachräumen und nach Kakutani in abstrakten  $(L)$ -Räumen entwickelt. Weitere Zusammenhänge mit der Wahrscheinlichkeitstheorie, Markoffsches Theorem, Poincaré'scher Wiederkehrsat.

Reviewer: Gottfried Köthe (Mainz)

For a scan of this review see the [web version](#).

**MSC:**

06-02 Research exposition (monographs, survey articles) pertaining to ordered structures

Cited in <b>26</b> Reviews Cited in <b>515</b> Documents
-------------------------------------------------------------

**Keywords:**

lattices; partial order; chains; chain conditions; complete lattices; modular lattices; application to algebra; semi-modular lattices; complemented modular lattices; distributive lattices; Boolean algebras; applications to set theory; applications to logic and probability; lattice-ordered semigroups; lattice-ordered groups; vector lattices; ergodic theory