Oberguggenberger, M.

Multiplication of distributions and applications to partial differential equations. (English)

Zbl 0818.46036
Pitman Research Notes in Mathematics Series 259. Harlow: Longman Scientific & Technical; New York: Wiley (ISBN 0-582-08733-3/pbk). xvii, 312 p. (1992).

Le livre de l'auteur sur la multiplication des distributions et l'application aux équations différentielles aux dérivées partielles est très documenté, il cite en effet 245 références, de plus il illustre les difficultés rencontrèes par de très nombreux exemples.

Le chapitre premier s'efforce de motiver l'interèt de la multiplication des distributions. Deux exemples modèles apparaîtront tout au long de cet ouvrage orienté vers la résolution des problèmes hyperboliques d'équations différentielles aux dérivées partielles: systèmes semi-linéaires (Chap. IV)

$$u_t + \Lambda u_x = F(u) \qquad \Lambda \text{ matrice diagonale}$$

(cf. modèle du prédateur, équations Carleman, Klein-Gordon,...) problème hyperbolique quasi-linéaire (Chap. V)

$$u_t + (f(u))_x = 0 \qquad \text{ou} \qquad u_t + g(u)u_x = 0,$$

avec condition initial distribution. Les questions posées sont:

I: Peut-on obtenir un produit de distributions stable par régularisation?

II: Un produit qui conserve les règles classiques de dérivation?

En suivant les idées de J. J. Colombeau, il en déduit que l'on peut construire des algèbres associatives de fonctions généralisées contenant $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, vérifiant II, le produit coincidant avec celui de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \times \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ mais pas de $\mathcal{C}(\mathbb{R}) \times \mathcal{C}(\mathbb{R})$. Pour cela il propose plusieurs approches.

Le chapitre II aborde la méthode intrinsique irrégulière. Pour cela l'auteur propose trois méthodes:

I: par dualité, méthode qui permet d'atteindre les espaces de Sobolev et d'effectuer le produit des "pseudo-fonctions" $Df(r^\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

II: par transformation de Fourier en utilisant une construction locale.

III: Par régularisation, le produit pouvant étre defini par quatre méthodes différentes les trois premières étant équivalentes, la quatrième dite, produit modèle, et notée $[uv]$ interviendra par la suite.

Une application importante permet d'obtenir la restriction d'une distribution à un sous espace vectoriel.

Le chapitre III est-consacré aux algèbres de Colombeau. Il introduit les espaces $\mathcal{A}q(\mathbb{R}^N)$, $E[\mathbb{R}^N] = (\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N))^{\mathcal{A}o(\mathbb{R}^N)}$, l'espace nul $\mathcal{N}(\mathbb{R}^N)$, l'algèbre $\mathcal{G}(\mathbb{R}^N) = E[\mathbb{R}^N]/\mathcal{N}(\mathbb{R}^N)$ répond aux critères souhaités. Pour Ω ouvert de $\mathbb{R}^N$ on peut également définir $\mathcal{G}(\Omega)$. Après avoir introduit une relation d'équivalence sur les éléments de $\mathcal{G}(\Omega)$ on obtient comme application:

$$H\delta \approx \frac{1}{2}\delta \qquad \text{et} \qquad Vp\left(\frac{1}{x}\right)\delta \approx -\frac{1}{2}\delta'.$$

Le chapitre IV s'interesse aux systèmes hyperboliques semi-linéaires, limité à la dimension un d'espace:

$$u_t + \lambda(x,t)u_x = F(u), \qquad u(x,0) = A, \tag{1}$$

soit avec F nonlinéaire, soit F linéaire mais avec des coefficients discontinus.

Le résultat principal (Th. 16-1) s'obtient par passage à la limite des solutions classiques de (1) pour des données initiales régulières obtenues par régularisation de A. Plus précisement pour $F \in \mathcal{O}_M(\mathbb{C}^N)$ convenablement borné ainsi que ses dérivées, le problème (1) admet une unique solution $U \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^2)$ pour tout $A \in \mathcal{G}(\mathbb{R})$. Si A est de plus une distribution dont le support est un ensemble discret, les solutions approchées convergent vers $v + w$, w solution de (1) avec $A = 0$, v solution de $v_t + \Lambda v_x = 0$, $v(0) = A$. En restreignant un peu les espaces on obtient un théorème d'existence et d'unicité pour le problème du prédateur.

Le chapitre V aborde les équations et systèmes:

$$(2) \quad u_t + (f(u))_x = 0,\ u(0) = A, \qquad (3) \quad u_t + g(u)u_x = 0,\ u(0) = A.$$

Dans le cas modèle avec $f(u) = u^2$, les conditions de Rankine- Hugoniat montrent que l'espace $\mathcal{G}(\mathbb{R} \times (0, \infty))$ n'est pas l'espae adapté au problème, ce qui conduit à introduire les espaces $\mathcal{G}_g(\overline{\Omega})$ pour obtenir le théorème 19.1.

Dans le cas du système (3) pour définir $g(u)u_x$ comme une mesure, il introduit le concept de solution de le Floch, ensupposant que u appartient à $\mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$, et pour $\mu \to 0$ la solution du problème régularisé:

$$u_t + uu_x = \mu u_{xx}, \quad \sigma_t + u\sigma x = 0, \quad u(0) = A, \quad \Sigma(0) = B,$$

conditions initiales de Riemann, converge vers l'onde de choc raréfiée mixte (prop. 20.7).

Au chapitre

Reviewer: M.-T.Lacroix (Saone)

MSC:

46F10	Operations with distributions and generalized functions
35L55	Higher-order hyperbolic systems
46-01	Introductory exposition (textbooks, tutorial papers, etc.) pertaining to functional analysis
35-01	Introductory exposition (textbooks, tutorial papers, etc.) pertaining to partial differential equations
35L67	Shocks and singularities for hyperbolic equations
46F12	Integral transforms in distribution spaces
46E35	Sobolev spaces and other spaces of "smooth" functions, embedding theorems, trace theorems

Keywords:

Cauchy problem; shock waves; Sobolev spaces; duality; hyperbolic problems of semilinear systems of partial differential equations; Carleman equation; Klein-Gordon equation; Fourier transformation; regularization; restriction of a distribution; Colombeau algebra; pseudo-functions; multiplication of distributions