Guillemin, Victor
Moment maps and combinatorial invariants of Hamiltonian T^n-spaces. (English)
Zbl 0828.58001
Progress in Mathematics (Boston, Mass.). 122. Basel: Birkhäuser. 150 p. (1994).

Soit $\widetilde{\rho}: G \times (M,\omega) \to (M,\omega)$ une action hamiltonienne d'un groupe compact G sur une variété symplectique (M,ω). Quantifier $\widetilde{\rho}$ c'est associer d'une façon naturelle une représentation unitaire ρ de G dans un espace de Hilbert $\mathcal{Q}(M)$.

Le but du livre est le suivant: Posant en principe que toutes les méthodes de quantification sont équivalentes, calculer les multiplicités des représentations irréductibles contenues dans ρ en termes d'invariants symplectiques associés au triple (M,ω,G) en utilisant en particulier le moment $\mathcal{J}$ de l'action de G dans (M,ω).

Le livre est divisé en quatre chapitres et deux appendices ces derniers relatifs aux variétés toriques.

Le premier chapitre est consacré à une présentation rapide de notions de base de la Géométrie symplectique (travaux de Kostant, Kirillov, Souriau, ce dernier un peu oublié dans la bibliographie), de l'éclatement symplectique de Gromov et du théorème de Delzant caractérisant l'action hamiltonienne d'un tore T^n sur une variété symplectique compacte (X,ω) par le polytope convexe Δ image de X dans $\mathbb{R}^{n*}$ par le moment. Δ jouit de propriétés de rationalité et l'auteur s'attache surtout à la construction d'un représentant standard X_Δ associé à Δ à l'aide de la réduction symplectique et donne en appendice, toujours en suivant Delzant, une construction alternative à l'aide des variétés toriques qui fournit la structure kaehlerienne de X_Δ. X_Δ servira dans la suite d'exemple et de test pour les différentes conjectures.

Le chapitre II tourne autour du théorème de Duistermaat-Heckman: Soit λ_0 une valeur régulière du moment J d'une action hamiltonienne d'un tore T sur la variété symplectique (X,ω), libre sur $\overline{\mathcal{J}}^1(\lambda_0)$. La classe $[\sigma_\lambda]$ de la 2 forme symplectique de la variété réduite $\overline{\mathcal{J}}^1(\lambda)/T$ pour $\lambda \neq \lambda_0$ est une fonction affine de λ [Pour une extension de ce résultat cf. notamment Lect. Notes Math. 1416, 39-74 (1990; Zbl 0702.58023), l'article du rapporteur et notamment les théorèmes 4-3 et 5-2].

La mesure de Duistermaat-Heckman $\mathcal{M}_{DH}$, est la mesure image de la mesure de Liouville par le moment $\mathcal{J}$ de T. L'Auteur calcule $\mathcal{M}_{DH}$ si $T = \mathbb{S}^1$ et dans le cas de X_Δ prouve que $\mathcal{M}_{DH}$ est la mesure de Lebesgue de Δ. Le lien avec la phase stationnaire est renvoyé en exercises.

Le chapitre III va permettre alors de formuler et discuter la conjecture but du livre. L'Auteur rappelle brièvement ce que l'on entend par préquantification et quantification géométrique, et le lien entre représentations irréductibles et orbitres coadjointes préquantifiables.

Soit ρ la représentation unitaire de G dans $\mathcal{Q}(M)$ quantifiant l'action hamiltonienne de G dans (M,ω). Soit ρ_0 une représentation irréductible de G (compact) et θ l'orbite coadjointe associée. Soit $k(\rho,\rho_0)$ la multiplicité de ρ_0 dans ρ et M_θ la variété réduite de $\overline{\theta} \times M$ (où $\overline{\theta}$ désigne θ munie de la structure symplectique opposée). M_θ est préquantifiable et tout le problème est de calculer $\dim M_\theta$car $\dim M_\theta = k(\rho,\rho_0)$.

Par ailleurs si τ_M désigne la classe de Todd de (M,ω) construite à l'aide d'une structure presque complexe subordonnée (pour une définition axiomatique directe de la 1° classe de Chern de (M,ω) [cf. *G. Patissier* et le rapporteur, Math. Sci. Res. Inst. Publ. 20, 73-97 (1991; Zbl 0732.58020)] et si $RR(M,\omega) = \int \tau_M \exp\omega$ désigne le nombre de Riemann- Roch, (qui ne dépend que de la classe de $[\omega]$) le théorème d'Atiyah-Singer assure que $RR(M,\omega) \in \mathbb{Z}$; sous réserve d'une extension de la notion de quantification, la conjecture prend la forme:

$$RR(M,\omega) = \dim k(\rho,\rho_0). \tag{*}$$

L'Auteur teste la conjecture $(*)$ sur X_Δ ce qui le conduit à développer complètement dans ce cas le passage de la préquantification à la quantification. Il débouche alors sur des problèmes combinatoires examinés à nouveau au chapitre suivant.

Le dernier chapitre est consacré à l'étude de la mesure de Duistermaat-Heckman. Le résultat principal est que pour une action hamiltonienne de tore n'ayant qu'un nombre fini de points fixes, $\mathcal{M}_{DH}$ est une somme alternée de mesures associées aux points fixes. Ce résultat n'est pas prouvé mais rendu "plausible" par l'examen du cas de X_Δ où l'on a vu que $\mathcal{M}_{DH}$ est la mesure de Lebesgue de Δ. L'analogue quantique du résultat précédent fournit alors l'expression de la multiplicité de points de T dans la représentation unitaire de T considérée, et dans le cas où $X = X_\Delta$ débouche sur des résultats combinatoires.

Cette analyse du livre n'en décrit que le squelette et ne rend pas compte suffisamment de son intérêt. Résultant d'un cours donné à l'automne 1992, ce livre a la vivacité d'un exposé oral, fourmillant de rapprochements féconds, de conjectures, de tentatives et de nombreuses indications bibliographiques. Mais ces qualités – l'écrit n'est pas l'oral – induisent certaines redites. Beaucoup de questions sont renvoyées en "exercises" ce qui a l'intérêt d'obliger le lecteur à vérifier pas à pas ses progrès dans la théorie mais présente quelque inconvénient si l'on veut s'en servir de référence pour une quête précise.

Le pari de s'adresser aux non-spécialistes est remarquablement tenu, et pour paraphraser un ouvrage célèbre, si sa lecture ne suppose en principe aucune connaissance particulière de géométrie symplectique, une certaine pratique de cette discipline n'est pas à dédaigner.

Bref, un livre foisonnant, mine de problèmes et de conjectures – certaines probablement fort difficiles, – qui peut être très certainement recommandé à tout chercheur débutant et encore plus aux chercheurs avertis.

Reviewer: P.Dazord (Villeurbanne)

MSC:

58-01 Introductory exposition (textbooks, tutorial papers, etc.) pertaining to global analysis
53C15 General geometric structures on manifolds (almost complex, almost product structures, etc.)
37J99 Dynamical aspects of finite-dimensional Hamiltonian and Lagrangian systems
53D50 Geometric quantization
37-02 Research exposition (monographs, survey articles) pertaining to dynamical systems and ergodic theory
05A19 Combinatorial identities, bijective combinatorics
14M25 Toric varieties, Newton polyhedra, Okounkov bodies
81S10 Geometry and quantization, symplectic methods
22E45 Representations of Lie and linear algebraic groups over real fields: analytic methods

Keywords:

quantization; symplectic geometry; toric varieties; representation theory; Hamiltonian actions; moment maps; Duistermaat-Hekmann measures; combinatorial invariants; Riemann-Roch number; dimension of multiplicity