Nagata, Masayoshi

The theory of multiplicity in general local rings. (English) Zbl 0075.02301

Proc. Internat. Sympos. algebraic number theory, Tokyo & Nikko Sept. 1955, 191-226 (1956).

In dieser Arbeit wird vom Verf. in Analogie zu *P. Samuel* [J. Math. Pures Appl., IX. Sér. 30. 159–205, 207–274 (1951; Zbl 0044.02701); Algbre locale. Mém. Sci. Math. No.123. Paris: Gauthier-Villars (1953; Zbl 0053.01901)] eine Multiplizitätstheorie für allgemeine Noethersche Stellenringe von Grund auf entwickelt. Verf. rechtfertigt dies damit, daß sich einerseits viele Ergebnisse von Samuel verallgemeinern oder einfacher beweisen lassen, andererseits Irrtümer zu korrigieren waren.

Ferner werden neue wichtige Resultate bewiesen. Die Dimension eines Stellenringes $\mathfrak{o}$, die durch den Rang von $\mathfrak{m}$ definiert wird, bezeichnet Verf. als Rang von $\mathfrak{o}$, die Dimension eines Ideals als co-Rang. Die von *C. Chevalley* [Trans. Am. Math. Soc. 57, 1–85 (1945; Zbl 0063.00841)] eingeführten äquidimensionaien Stellenringe nennt Verf. ungemischt. In der Terminologie des Verf. ist also ein Stellenring ungemischt, wenn der co-Rang jedes Primteilers des Nullideals der perfekten Hülle $\mathfrak{o}^*$ von $\mathfrak{o}$ gleich dem Rang von $\mathfrak{o}$ ist.

Im §1 werden bekannte Ergebnisse aus der allgemeinen Theorie der Stellenringe mit Quellenangaben zusammengestellt.

Im §2 beschäftigt sich Verf. mit der Hilbertschen charakteristischen Funktion. Ein Ring $\mathfrak{o}$ heißt ein primärer Ring,wenn er ein Stellenring ist, dessen Nichteinheiten nilpotent sind. Sei M ein Modul über einem Ring $\mathfrak{o}$. Wenn eine Kompositionsreihe $M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_n = 0$ von M (als $\mathfrak{o}$-Modul) existiert, dann heißt die Länge dieser Kompositionsreihe die Länge von M, in Zeichen $l(M; \mathfrak{o})$ oder kurz $l(M)$. Sei A ein primärer Ring, F der Ring der Polynome über A in den Unbekannten $X_1, \dots, X_s$, $\mathfrak{a}$ ein homogenes Ideal von F, $F(n)$ der A-Modul der Formen vom Grade n in F, $\mathfrak{a}(n)$ der Modul $a \cap F(n)$, dann wird die Hilbertsche charakteristische Funktion $\chi(\mathfrak{a}; n)$ durch $\chi(\mathfrak{a}; n) = l(F(n)/\mathfrak{a}(n))$ definiert. Anschließend werden die bekannten Rechenregeln für $\chi(\mathfrak{a}; n)$ hergeleitet.

§3 handelt von den Formenringen eines Stellenringes. Sei $\mathfrak{o}$ ein Stellenring mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{q}$ ein zu $\mathfrak{m}$ gehöriges Primideal; $A = \mathfrak{o}/\mathfrak{q}$ ist dann ein primärer Ring (im Sinne des Verf.). Der A-Modul $\mathfrak{q}^n/q^{n+1}$ ($\mathfrak{q}^0 = \mathfrak{o}$) heißt $\mathfrak{q}$-Form vom Grad n, in Zeichen: $F(\mathfrak{q}; n)$. Die direkte Summe $F(q)$ aller $F(\mathfrak{q}; n)$ wird Formenring von $\mathfrak{o}$ bezüglich $\mathfrak{q}$ genannt. Aus der Existenz eines Ideals $\mathfrak{a}$ mit $\chi(a; n) = l(F(q; n))$ und der Beziehung $l(\mathfrak{o}/\mathfrak{q}^n) = \sum_{i=0}^{n-1} l(F(\mathfrak{q}; i))$ gewinnt Verf. vermittels der Eigenschaft der Hilbertschen charakteristischen Funktion, für genügend große n gleich dem sogenannten charakteristischen Polynom zu werden, den bereits bei Samuel vermerkten Satz: Für genügend große n ist $l(\mathfrak{o}/\mathfrak{q}^n)$ ein Polynom $\sigma(\mathfrak{q}; n)$ vom Grad $d = \mathrm{Rang}\mathfrak{o}$, also $\sigma(q; n) = an^d + \dots$. Damit wird im §4 die Multiplizität $e(\mathfrak{q})$ durch $e(\mathfrak{q}) = (d!) \cdot a$ definiert; $e(\mathfrak{m})$ wird als Multiplizität von $\mathfrak{o}$, in Zeichen $m(\mathfrak{o})$ bezeichnet.

Verf. Verallgemeinert nun anschließend diese Definition auf (Noethersche) Halbstellenringe. Seien $\mathfrak{n}_1, \dots, \mathfrak{n}_r$ gewisse der maximalen Ideale des Halbstellenringes $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{q}_l, \dots, \mathfrak{q}_r$ zugehörige Primärideale, sei ferner $\mathfrak{m} = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r$. Dann ist $l(\mathfrak{o}/\mathfrak{m}^n) = \sigma(\mathfrak{m}, n) = an^d + \dots$ mit $d = \mathrm{Max}\{(\mathrm{Rang}\mathfrak{p}_\rho\}$, und die Multiplizität wird durch $e(\mathfrak{m}) = (d!) \cdot a$ definiert. Unter dem J-Radikal (Jacobsonschen Radikal) $\mathfrak{m}$ eines Halbstellenringes $\mathfrak{o}$ versteht Verf. wie üblich den Durchschnitt aller maximalen Ideale von $\mathfrak{o}$. Die Multiplizität $e(\mathfrak{m})$ dieses J-Radikals $\mathfrak{m}$ wird als Multiplizität von $\mathfrak{o}$, in Zeichen $m(\mathfrak{o})$, bezeichnet.

Ist der Stellenring $\mathfrak{o}'$ (mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{m}'$) Unterring des Halbstellenringes $\mathfrak{o}$ derart, daß für alle i gilt (1) $\mathfrak{M}' \subseteq /\mathfrak{p}_i$ ist ein endlicher Modul über $\mathfrak{o}'/\mathfrak{m}'$, dann gibt es wieder eine Polynomdarstellung $l(\mathfrak{o}/\mathfrak{m}^n, \mathfrak{o}') = \sigma(\mathfrak{m}; \mathfrak{o}'; n) = an^d + \dots$ und die relative Multiplizität $rm(\mathfrak{m}; \mathfrak{o}')$ von $\mathfrak{m}$ bezüglich $\mathfrak{o}'$ wird durch $rm(m; o') = (d!) \cdot a$ definiert.

Im §5 werden elementare Eigenschaften der Multiplizität bewiesen, u.a., daß für jedes durch ein Parametersystem erzeugte (Primär-)Ideal q eines Stellenringes $e(\mathfrak{q}) \leq l(\mathfrak{o}/\mathfrak{q})$ gilt, sowie das folgende

Theorem 1. Sei $\mathfrak{o}$ ein Stellenring mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ und q ein zu $\mathfrak{m}$ gehöriges Primärideal. Wenn $\mathfrak{o}/\mathfrak{m}$ unendlich viele Elemente enthält, dann existiert ein durch ein Parametersystem erzeugtes Ideal $\mathfrak{q}' \subseteq \mathfrak{q}$ mit $e(\mathfrak{q}') = e(\mathfrak{q})$. Druckfehler: Die rechte Seite der Gleichung fehlt.

§6 beginnt mit dem Beweis der "Erweiterungsformel": Sei $\mathfrak{o}$ ein Stellenring mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ und sei $\mathfrak{q}$ ein zu $\mathfrak{m}$ gehöriges Primärideal. Im Oberring $\mathfrak{o}' \supset \mathfrak{o}$ existiere ein System über $\mathfrak{o}$ linear unabhängiger

Elemente $a_1 = 1, a_2, \ldots, a_r$ und in $\mathfrak{o}$ existiere ein Element c, welches kein Nullteiler in $\mathfrak{o}'$ ist, derart, daß $c\mathfrak{o}' \subset \sum_{i=1}^r a_i\mathfrak{o}$ gilt. Dann ist $e(\mathfrak{q}) \cdot r = rm(\mathfrak{q}\mathfrak{o}'; \mathfrak{o})$.

Anschließend beweist Verf. einen Additivitätssatz, der auf *D. G. Northcott* and *D. Rees* [Proc. Camb. Philos. Soc. 50, 145–158 (1954; Zbl 0057.02601)] bzw. Samuel zurückgeht: Sei $\mathfrak{o}$ ein Stellenring und seien alle Primteiler $\mathfrak{p}_l, \ldots, \mathfrak{p}_r, \mathfrak{p}_{r+1}, \ldots, \mathfrak{p}_s$ des Nullideals so numeriert, daß co-Rang $\mathfrak{p}_i$ = Rang$\mathfrak{o}$ dann und nur dann gilt, wenn $i \leq r$ ist. Sind $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_r$ Primärkomponenten des Nullideals mit den zugehörigen Primidealen $p_l, \ldots, \mathfrak{p}_r$, so gilt $e(\mathfrak{q}) = \sum_{i=1}^r e((\mathfrak{q} + \mathfrak{q}_i)/\mathfrak{q}_i)$.

Sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zwei Ideale aus $\mathfrak{o}$ mit co-Rang $\mathfrak{a} >$ co-Rang $\mathfrak{b}$, so gilt $e((\mathfrak{q} + \mathfrak{a})/\mathfrak{a}) = e((\mathfrak{q} + (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})/(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}))$.

§7 beschäftigt sich mit ausgezeichneten Parametersystemen von $\mathfrak{o}$, die Verf. abweichend von Samuel wie folgt definiert: Nach §5 gilt für ein (Primär-)Ideal $\mathfrak{q}$, welches durch ein Parametersystem erzeugt wird, die Ungleichung $e(\mathfrak{q}) \leq l(\mathfrak{o}/\mathfrak{q})$. Gilt das Gleichheitszeichen, so nennt Verf. das $\mathfrak{q}$ erzeugende Parametersystem ein ausgezeichnetes Parametersystem. Die Äquivalenz mit der Samuelschen Definition wird gezeigt. Verf. beweist dann

Theorem 4. Besitzt ein Stellenring $\mathfrak{o}$ ein ausgezeichnetes Parametersystem, dann ist jedes Parametersystem ausgezeichnet. Daraus ergibt sich: Jedes Parametersystem eines regulären Stellenringes ist ein ausgezeichnetes Parametersystem.

Verf. führt dann folgenden Begriff ein: In einem Ring $\mathfrak{o}$ gelte der Ungemischtheitssatz, wenn jedes Ideal der Hauptklasse ungemischt ist. Verf. zeigt, daß dies in einem Stellenring $\mathfrak{o}$ dann und nur dann der Fall ist, wenn $\mathfrak{o}$ ein ausgezeichnetes Parametersystem besitzt (Theorem 5). Mit diesem schönen und interessanten Ergebnis ist Verf. in der Lage, mehrere Ringe sofort anzugeben, in denen der Ungemischtheitssatz gilt. Solche Ringe heißen bei *D. G. Northcott* [Q. J. Math., Oxf. II. Ser. 11, 81–104 (1960; Zbl 0112.03001)] Macaulay-Cohensche Ringe, bei *O. Zariski* and *P. Samuel* [Commutative algebra. Vol. II. (The University Series in Higher Mathematics.) Princeton, N.J.-Toronto- London-New York: D. Van Nostrand Company, Inc. (1960; Zbl 0121.27801)], App. 6, Macaulaysche Ringe.

Im §8 kommt Verf. zu einer Charakterisierung der regulären Stellenringe: Ein Stellenring $\mathfrak{o}$ ist dann und nur dann regulär, wenn er die Vielfachheit 1 hat und ungemischt ist (Theorem 6). Dies ist in der einen Richtung schärfer als der entsprechende Satz bei Samuel.

§9 beschäftigt sich mit dem "Übergangssatz" (Theorem of transition, Theorem 7): Sei $\mathfrak{o}^*$ die perfekte Hülle eines Stellenringes $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{q}$ ein Primärideal von $\mathfrak{o}$ mit dem Primteiler $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}^*$ ein minimaler Primteiler von $\mathfrak{n}\mathfrak{o}^*$. Sei $m(\mathfrak{p}^*) = l(\mathfrak{o}^*_{\mathfrak{p}^*}/\mathfrak{n}\mathfrak{o}^*_{\mathfrak{p}^*})$. Dann gilt

$$l(\mathfrak{o}^*_{\mathfrak{p}^*}/\mathfrak{q}\mathfrak{o}^*_{\mathfrak{p}^*}) = m(\mathfrak{n}^*) \cdot l(\mathfrak{o}/\mathfrak{q}\mathfrak{q}\mathfrak{n}_{\mathfrak{p}}),$$

$$\sigma(\mathfrak{q}\mathfrak{o}^*_{\mathfrak{n}^*}; n) = m(\mathfrak{n}^*)\sigma(\mathfrak{q}\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}; n) \text{ und } e(\mathfrak{q}\mathfrak{o}^*_{\mathfrak{n}^*}) = m(\mathfrak{n}^*) \cdot e(\mathfrak{q}\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}).$$

Im §10 wird der Beweis einer Assoziativformel (Theorem 8) begonnen, die folgendes beinhaltet: Sei $x_1, \ldots, x_d$ ein Parametersystem eines Stellenringes $\mathfrak{o}$ und sei $q = \sum_{i=1}^d x_i\mathfrak{o}$, $\mathfrak{a} \sum_{i=1}^s x_i\mathfrak{o}$. Dann gilt

$$e(\mathfrak{q}) = \sum_{\mathfrak{p}} e(\mathfrak{a}\mathfrak{o}_{\mathfrak{n}}) \cdot e((\mathfrak{q} + \mathfrak{p})/\mathfrak{p}),$$

wobei die Summe sich über alle diejenigen (minimalen) Primteiler von $\mathfrak{a}$ mit co-Rang $\mathfrak{p} = d - s$, Rang $\mathfrak{p} = s$ erstreckt. Ref. bemerkt, daß ein anderer Beweis derselben Assoziativformel in einer fast gleichzeitig vorgelegten Arbeit von *C. Lech* [Ark. Mat. 3, 301–314 (1957; Zbl 0089.26002)] gegeben wird.

Im §11 beweist Verf. folgenden Reduktionssatz: Ist in einem Stellenring $\mathfrak{o}$ mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ das Nullideal primär mit $\mathfrak{p}$ als Primteiler, dann gilt für jedes zu $\mathfrak{m}$ gehörige Primärideal $\mathfrak{q} : e(\mathfrak{q}) = e((\mathfrak{q}+\mathfrak{p})/\mathfrak{p}) \cdot l(\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}})$. Eine Verallgemeinerung dieses Satzes hat *D. Rees* [Mathematika, Lond. 4, 51–60 (1957; Zbl 0089.26003)] aus der Nagata-Lechschen Assoziativformel gefolgert.

Im §12 wird der Beweis von Theorem 8 zu Ende geführt, während im §13 folgende Aussage über die Multiplizität von Quotientenringen gemacht wird: Ist p ein analytisch unverzweigtes Primideal eines Stellenringes $\mathfrak{o}$ mit Rang$\mathfrak{p}$ + co − Rang$\mathfrak{p}$ = Rang$\mathfrak{o}$, so ist $\mathfrak{m}(\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}) \leq \mathfrak{m}(\mathfrak{o})$.

Im §14 wird die Definition der Multiplizität in Kroneckerschen Produkten von Stellenringen durch Einführung sogenannter "vollständiger Tensorprodukte" auf Halbstellenringe verallgemeinert.

In einem Anhang beschäftigt sich Verf. mit der Darstellbarkeit von Polynomen durch Binomialkoeffizienten (Druckfehler: Statt d_0 lies c_0).

Reviewer: Bodo Renschuch (Orono)

For a scan of this review see the web version.

MSC:

13-02 Research exposition (monographs, survey articles) pertaining to commutative algebra
13Hxx Local rings and semilocal rings

Keywords:

Rings, modules, fields