Richartz, Melanie

Classification of selfdual Dieudonné lattices in a three dimensional polarized supersingular isocrystal. (Klassifikation von selbstdualen Dieudonnégittern in einem dreidimensionalen polarisierten supersingulären Isokristall.) (German) Zbl 0906.14021

Bonner Mathematische Schriften, 311. Bonn: Univ. Bonn, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät, 45 S. (1998).

Es sei $\mathcal{A}_{g,N}/\mathbb{F}_p$ der Modulraum der prinzipal polarisierten abelschen Varietäten der Dimension $g \geq 1$ in Charakteristik $p \geq 3$ mit N-Niveaustruktur, wobei $N \geq 3$ eine zu p teilerfremde ganze Zahl ist. Eine abelsche Varietät heißt supersingulär, wenn sie isogen zu einem Produkt supersingulärer elliptischer Kurven ist. Der supersinguläre Ort $\mathcal{A}^{ss}_{g,N}$ in $\mathcal{A}_{g,N}$ ist die Teilmenge, deren Punkte zu supersingulären abelschen Varietäten korrespondieren. Die Menge der

F_p-wertigen Punkte von $\mathcal{A}^{ss}_{g,N}$ läßt sich wie folgt beschreiben: Es seien $G := \mathrm{GSp}_g/\mathbb{Q}$ die Gruppe der symplektischen Ähnlichkeiten in $2g$ Variablen, $K^p_N := \mathrm{Ker}(G(\mathbb{A}^p_f) \to G(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}))$ und $\mathcal{M}^p := G(\mathbb{A}^p_f)/K^p_N$. Hier bezeichne $\mathbb{A}^p_f$ die Elemente im Adelring $\mathbb{A}$ von $\mathbb{Q}$, die an den Stellen p und ∞ trivial sind. $I/\mathbb{Q}$ bezeichne die Isogeniegruppe einer supersingulären abelschen Varietät über

F_p. Schließlich sei Y der (bis auf Isomorphie) eindeutige polarisierte supersinguläre Isokristall über

F_p der Dimension g. Dies ist ein $2g$-dimensionaler Vektorraum über dem Quotientenkörper des Wittrings W von

F_p, zusammen mit einem semilinearen Automorphismus F und einer nicht-ausgearteten alternierenden Form, die eine Kompatibilitäts-Bedingung erfüllen. Dann gilt [siehe *R. E. Kottwitz* in: Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions, Vol. I, Proc. Conf., Ann. Arbor 1988, Perspect. Math. 10, 161-209 (1990; Zbl 0743.14019); §12]:

$$\mathcal{A}^{ss}_{g,N}(\mathrm{F}_p) = I(\mathbb{Q}) \setminus \mathcal{M}^p \times \mathcal{M}_p.$$

Hierbei ist $\mathcal{M}_p$ die Menge der bis auf einen Faktor selbstdualen Gitter in Y, für die gilt: $pM \subset FM \subset M$. Auf der Menge $\mathcal{M}_p$ operieren der Automorphismus F des Isokristalls und die Gruppe $G^*(\mathbb{Q}_p)$, wobei $G^* := I \times \mathbb{Q}_p$.

Das Ziel dieser Arbeit ist es, für $g = 3$ die Menge $\mathcal{M}_p$ zusammen mit diesen Operationen zu beschreiben. $\mathcal{M}_p$ wird in Termen des Bruhat-Tits-Gebäudes $\mathcal{B}(G^*)$ der Gruppe G^* über $\mathbb{Q}_p$ folgendermaßen beschrieben: Methoden von *T. Katsura* und *F. Oort* [in: Algebraic geometry, Proc. Symp., Sendai 1985, Adv. Stud. Pure Math. 10, 253-281 (1987; Zbl 0656.14025)] beschreiben gewisse Teilmengen in $\mathcal{M}_p$, die $\mathcal{M}_p$ überdecken. Deren Schnittverhalten beschreibt ein Graph $\mathcal{H}$. Das Hauptresultat dieser Arbeit ist folgender Satz:

Satz: Es gilt $\mathcal{H} = \coprod_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{G}_n$ mit $\mathcal{G}_n := \mathcal{B}(G^*)_n := \mathcal{B}(G^*)$ für $n \in \mathbb{Z}$. Die durch F und $g \in G^*(\mathbb{Q}_p)$ induzierten Operationen auf $\mathcal{H}$ sind gegeben durch

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathcal{B}(G^*)_n & \to & \mathcal{B}(G^*)_{n+1} \\ & x & \mapsto & x. \end{array}$$

Für $g \in G^*(\mathbb{Q}_p)$ ergibt sich

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathcal{B}(G^*)_n & \to & \mathcal{B}(G^*)_{n+\mathrm{val}_p\left(\mu(g)\right)} \\ & x & \mapsto & gx, \end{array}$$

wobei $x \mapsto gx$ die übliche Operation von g auf dem Bruhat-Tits-Gebäude $\mathcal{B}(G^*)$ bezeichnet.

MSC:

14K10 Algebraic moduli of abelian varieties, classification
14K15 Arithmetic ground fields for abelian varieties
14G35 Modular and Shimura varieties

Keywords:

principally polarized abelian variety; supersingular abelian variety; supersingular isocrystal; Dieudonné lattice; Bruhat-Tits-building; Shimura variety