Roy, Damien

Interpolation formulas and auxiliary functions. (English) Zbl 1010.11039

J. Number Theory 94, No. 2, 248-285 (2002).

Les démonstrations de transcendance et d'indépendance algébrique reposent sur la construction par extrapolation d'une fonction auxiliaire, holomorphe sur un certain domaine, de norme petite sur une boule assez grande contenue dans ce domaine. L'auteur, considérant les problèmes ouverts classiques (théorème des six exponentielles, conjecture de Schanuel et généralisations,...) pour lesquels cette approche jusqu'à présent échoue, se pose la question de savoir dans quelle mesure la fonction auxiliaire ainsi construite exploite pleinement les hypothèses. Reprenant un travail précédent sur la fonction exponentielle, il démontre, dans ce texte pour les fonctions elliptiques de Weierstrass, que l'existence d'une suite de telles fonctions auxiliaires est en fait équivalente à l'appartenance du point considéré au sous-groupe analytique attaché à la situation. Il démontre également qu'on ne peut espérer construire une fonction auxiliaire du même type qui soit beaucoup plus petite sur la boule précédemment exhibée.

Le point essentiel à la base de ces résultats est une formule d'interpolation, d'où découlent des lemmes de Schwarz et d'approximation pour les fonctions analytiques de plusieurs variables complexes, sur des ensembles "semi-produits" mélangeant multitude et multiplicités des points. Il est remarquable que, même dans le cas du lemme de Schwarz, le décompte des points doit se faire modulo une condition de séparation explicite. Des exemples montrent que cette condition est bel et bien nécessaire.

Reviewer: P.Philippon (Paris)

MSC:

11J81 Transcendence (general theory)
11J85 Algebraic independence; Gel'fond's method
11J89 Transcendence theory of elliptic and abelian functions
41A05 Interpolation in approximation theory
32E30 Holomorphic, polynomial and rational approximation, and interpolation in several complex variables; Runge pairs

Keywords:

Schwarz lemma; Weierstrass elliptic function

Full Text: DOI

References:

[1] Baker, A., The theory of linear forms in logarithms, Transcendence theory: advances and applications, proc. conf., univ. Cambridge, Cambridge, 1976, (1977), Academic Press London, p. 1-27 · Zbl 0361.10028
[2] Cassels, J.W.S., An introduction to Diophantine approximation, (1957), Cambridge Univ. Press Cambridge · Zbl 0077.04801
[3] Lang, S., Transcendental numbers and Diophantine approximations, Bull. amer. math. soc., 77, 635-677, (1971) · Zbl 0218.10053
[4] Mahler, K., On a class of entire functions, Acta math. acad. sci. hungar., 18, 83-96, (1967) · Zbl 0207.35602
[5] Masser, D.W., Polynomial interpolation in several complex variables, J. approx. theory, 24, 18-34, (1978) · Zbl 0401.32009
[6] Masser, D.W., On polynomials and exponential polynomials in several complex variables, Invent. math., 63, 81-95, (1981) · Zbl 0436.32005
[7] Moreau, J.-C., Lemmes de Schwarz en plusieurs variables et applications arithmétiques, Sém. P. Lelong, H. skoda, analyse, 1978/79, Lecture notes in math., 822, (1980), Springer-Verlag Berlin/New York, p. 174-190 · Zbl 0452.10036
[8] Philippon, P., Critères pour l'indépendance algébrique, Inst. hautes etudes sci. publ. math., 64, 5-52, (1986) · Zbl 0615.10044
[9] Roy, D., An arithmetic criterion for the values of the exponential function, Acta arith., 97, 183-194, (2001) · Zbl 0981.11025
[10] Roy, D., Une formule d'interpolation en deux variables, J. théor. nombres Bordeaux, 13, 315-323, (2001) · Zbl 1053.11063
[11] Tijdeman, R., An auxiliary result in the theory of transcendental numbers, J. number theory, 5, 80-94, (1973) · Zbl 0254.10027

[12] Waldschmidt, M., Nombres transcendants et groupes algébriques, Astérisque, 69-70, (1979)

[13] Waldschmidt, M., Transcendance et exponentielles en plusieurs variables, Invent. math., 63, 97-127, (1981) · Zbl 0454.10020

[14] Waldschmidt, M., Sous-groupes analytiques de groupes algébriques, Ann. of math., 117, 627-657, (1983) · Zbl 0579.14039

[15] Waldschmidt, M., Approximation diophantienne dans LES groupes algébriques commutatifs. I. une version effective du théorème du sous-groupe algébrique, J. reine angew. math., 493, 61-113, (1997) · Zbl 0880.11054