Dieudonné, J.

La dualité dans les espaces vectoriels topologiques. (French) JFM 68.0238.02

Ann. sci. École norm. sup. (3) 59, 107-139 (1942).

Teil I. E und E' seien lineare Vektorräume bezüglich des Körpers der komplexen Zahlen. Für alle $x \in E$, $x' \in E'$ sei eine Bilinearform $B(x, x')$ erklärt, so daß aus $B(x, x') = 0$ für alle $x \in E$ stets $x' = 0$ und aus $B(x, x') = 0$ für alle $x' \in E'$ stets $x = 0$ folgt. $B(x, x')$ ist für festes x' eine Linearform $B_{x'}$ in E. Die Umgebungen $\sup_{1 \leqq i \leqq n} |B(x, x'_i)| \leqq 1$, x'_i feste Punkte aus E', von 0 erklären auf E eine Topologie, die schwache Topologie $\sigma(E, E')$, durch die E zu einem lokalkonvexen Raum wird. E' ist der duale Raum zu E, d. h. der Raum aller im Sinn der schwachen Topologie auf E stetigen Linearfunktionen. Entsprechendes gilt für E. x und x' heißen orthogonal, wenn $B(x, x) = 0$ ist. Ist M eine Teilmenge von E, so sei M^* die Menge der zu allen $x \in M$ orthogonalen $x' \in E'$. Aus dem Hahn-Banachschen Erweiterungssatz für Linearfunktionen folgt, daß M^{**} die abgeschlossene Hülle von M ist, $M^* = M^{***}$.

A sei ein Teilraum von E. $\sigma(E, E')$ induziert eine Topologie in A. In bezug auf diese Topologie sei A' der duale Raum zu A. A und A' bilden ein Paar von Räumen im Sinne der obigen Definition, wenn $B(x, x') = x'(x)$ gesetzt wird, x' eine Linearfunktion auf A; also ist in A die Topologie $\sigma(A, A')$ erklärt; sie stimmt mit der durch $\sigma(E, E')$ induzierten überein. A' ist der duale Raum zur abgeschlossenen Hülle $\bar{A}$ von A. Wird A' mit der Topologie $\sigma(A', \bar{A})$ versehen, so ist A' isomorph zum Quotientenraum E'/A^*, der mit der durch $\sigma(E', E)$ bestimmten Topologie des Quotientenraumes versehen ist. Analog gilt: Ist A linear abgeschlossen in E, so ist der schwach duale Raum F' zu $F = E/A$ isomorph zu A^* und $\sigma(F, F')$ ist identisch mit der Quotiententopologie $\sigma(E, E')$ nach A.

u sei eine lineare Abbildung von E in F; zu E und F mögen E' und F' gehören mit den Bilinearrelationen $B(x, x')$, $C(y, y')$. u ist dann und nur dann schwach stetig, d. h. stetig im Sinne der Topologien $\sigma(E, E')$ bzw. $\sigma(F, F')$, wenn für jedes y' in F' durch $x \to C(u(x), y')$ eine stetige Linearform in E gegeben wird. Zu jedem $y' \in F'$ gehört genau ein x' in E', so daß $C(u(x), y') = B(x, x')$ ist. Die so definierte Abbildung u' von F' in E' heißt zu u transponiert. Sie ist ebenfalls stetig u ist dann und nur dann eineindeutig, wenn $u'(F')$ überall dicht in E' ist. Dann wird ein Lösbarkeitskriterium für Gleichungen $u(x) = y_0$ abgeleitet. Daraus folgt: Ist $u(E)$ abgeschlossen in F, so ist $u(x) = y_0$ dann und nur dann lösbar, wenn y_0 orthogonal zur Urbildmenge $u'(0)$ der 0 bei u' ist. $u(E)$ ist dann und nur dann abgeschlossen, wenn u' ein Homomorphismus von F' auf $u'(F')$ ist. Diese Theorie ist im wesentlichen eine Verallgemeinerung der Theorie der vollkommenen Räume von G. Köthe und O. Toeplitz auf beliebige lokalkonvexe Räume. Die Idee der dualen Räume ist noch weitergeführt worden.

Die Anwendbarkeit dieser Theorie wird in Teil II bewiesen, in dem die Hauptsätze der Theorie der normierten Räume (Banachräume) unter Verwendung der Theorie der Dualität neu hergeleitet werden. Neben den klassischen Resultaten, wie sie etwa in der Arbeit von *F. Hausdorff* (J. reine angew. Math. 167 (1932), 294-311; F. d. M. 58_{II}, 1113) enthalten sind, werden auch zum ersten Mal mit Beweisen die Resultate von *N. Bourbaki* (C. R. Acad. Sci., Paris, 206 (1938), 1701-1704; F. d. M. 64_{II}, 1098) dargestellt, darunter der Satz: Ein normierter Raum E ist dann und nur dann reflexiv, wenn die Einheitskugel aller x in E mit $\|x\| \leqq 1$ schwach kompakt ist. Im Anhang wird auf ein damit zusammenhängendes Kriterium von *H. H. Goldstine* (Duke math. J. 4 (1938), 125-131; F. d. M. 64_{I}, 369) näher eingegangen. Ein Teil der Resultate wurde in zwei Noten angekündigt (C. R. Acad. Sci., Paris, 211 (1940), 94-97, 129-131; F. d. M. 66, 531 (JFM 66.0531.*), 532).

Reviewer: Köthe, G., Prof. (Gießen)

Full Text: DOI EuDML