Whitman, P. M.
Free lattices. (English) JFM 67.0085.01
Ann. Math., Princeton, (2) 42, 325-330 (1941).

$\mathfrak{L}$ sei der durch n Elemente $X_1, \ldots, X_n$ erzeugte freie Verband. Eine aus diesen X_i und den Verbandsoperationen $\cup$ und $\cap$ und Klammern aufgebaute endliche Verbindung heiße ein Verbandspolynom. $\leqq$ sei die Teilrelation in $\mathfrak{L}$. Es gilt $X_i \leqq X_j$ dann und nur dann, wenn $i = j$ ist; allgemein gilt für zwei Verbandspolynome A und B die Beziehung $A \leqq B$ dann und nur dann, wenn rekursiv einer oder mehrere der folgenden Fälle vorliegen: a) $A \equiv A_1 \cup A_2$ mit $A_1 \leqq B$ und $A_2 \leqq B$, b) $A \equiv A_1 \cap A_2$ mit $A_1 \leqq B$ oder $A_2 \leqq B$, c) $B \equiv B_1 \cup B_2$ mit $A \leqq B_1$ oder $A \leqq B_2$, d) $B \equiv B_1 \cap B_2$ mit $A \leqq B_1$ und $A \leqq B_2$. Dieser Satz gibt ein rekursives Verfahren, um für zwei beliebige A, B zu entscheiden ob $A \leqq B$ ist, oder nicht. Damit ist (wegen $A = B$ dann und nur dann, wenn $A \leqq B$ und $B \leqq A$) auch ein Verfahren angegeben, die Gleichheit im Sinne des Verbandes $\mathfrak{L}$ von zwei Verbandspolynomen festzustellen. Für die praktische Durchführung werden weitere Regeln abgeleitet. Als Länge eines Verbandspolynoms A wird die Gesamtzahl der in A auftretenden X_t (mit Wiederholung) bezeichnet; so hat z. B. $A = (X_1 \cap X_1) \cup X_2$ die Länge 3. Es wird bewiesen, daß unter allen zu einem A gleichen Verbandspolynomen ein bis auf Kommutativität und Assoziativität eindeutig bestimmtes von kürzester Länge existiert. Regeln zur Bestimmung dieser kanonischen Gestalt werden angegeben.

Reviewer: Köthe, G., Prof. (Gießen)

Full Text: DOI