Hajós, G.

Über einfache und mehrfache Bedeckung des n-dimensionalen Raumes mit einem Würfelgitter. (German) JFM 67.0137.04

Math. Z. 47, 427-467 (1941).

Die Minkowskische Vermutung, daß eine lückenlose Ausfüllung des R_n mit gitterförmig gelagerten kongruenten Würfeln stets balkenförmig ist, d. h. daß es immer Paare von Würfeln geben muß, die mit einer ganzen $(n-1)$-dimensionalen Seitenfläche aneinander stoßen, konnte bis jetzt nur für $n \leqq 9$ bestätigt werden. In dieser hochbedeutsamen Arbeit gelingt nun dem Verf. der Nachweis für beliebiges n, und zwar geht er einen ganz neuen Weg und ist von allen Vorgängern unabhängig.

Die Koordinatenachsen werden natürlich den Würfelkanten parallel gewählt, und die Würfelkante ist die Längeneinheit. Dann wird zunächst gezeigt, daß es genügt, sich auf den Fall zu beschränken, daß die Mittelpunkte der Würfel rationale Koordinaten haben. Da die Mittelpunkte ein Gitter bilden, ist dann für die ν-te Koordinate aller Würfel ein Hauptnenner a_ν vorhanden. Bezeichnet man die Translation um die Strecke $\dfrac{1}{a_\nu}$ in Richtung der ν-ten Koordinate mit A_ν, so wird die unendliche (freie) Abelsche Gruppe mit den Erzeugenden $A_1, \dots, A_n$ betrachtet; Verf. bezeichnet sie mit $P(D)$. Hiervon bilden diejenigen Translationen, welche den Nullpunkt in einen Würfelmittelpunkt verschieben, eine Untergruppe $P(W)$ mit n Erzeugenden

$$A_1^{c_{\nu 1}}\, A_2^{c_{\nu 2}} \cdots A_n^{c_{\nu n}} \quad (\nu = 1, 2, \dots, n). \tag{1}$$

Verf. betrachtet nun die Faktorgruppe $P(D)/P(W)$, die aus der freien Gruppe $P(D)$ mit den Elementen

$$A_1^{\alpha_1}\, A_2^{\alpha_2} \cdots A_n^{\alpha_n} \qquad (-\infty < \alpha_\nu < \infty) \tag{2}$$

dadurch entsteht, daß die Elemente (1) gleich der Einheit gesetzt werden. Die Elemente der Faktorgruppe haben dann ebenfalls die Gestalt (2), aber jedes läßt sich, vermöge der erzeugenden Relationen

$$A_1^{c_{\nu 1}}\, A_2^{c_{\nu 2}} \cdots A_n^{c_{\nu n}} = 1 \quad (\nu = 1, 2, \dots, n). \tag{3}$$

auf unendlich viele Alten so darstellen.

Die lückenlose Ausfüllung kann nun so interpretiert werden, daß die Gruppe $P(W)$ den Einheitswürfel zum Diskontinuitätsbereich hat, oder auch so, daß die Elemente der Faktorgruppe sich vermöge der Relationen (3) auf eine und nur eine Weise in der Gestalt (2) mit den Nebenbedingungen

$$0 \leqq \alpha_1 < a_1, \dots, 0 \leqq \alpha_n < a_n$$

darstellen lassen. Die Faktorgruppe ist also endlich und zwar von der Ordnung $a_1 a_2 \cdots a_n$. Die balkenförmige Lagerung drückt sich dagegen so aus, daß unter den Würfeln einer ist, dessen eine Mittelpunktskoordinate, etwa die ν-te, gleich 1 ist und die anderen gleich 0, d. h. daß aus den erzeugenden Relationen (3) folgen muß: $A_\nu^{a_\nu} = 1$ für wenigstens einen Index ν. Somit ist die Minkowskische Vermutung auf folgenden Satz über endliche Abelsche Gruppen zurückgeführt: "Wenn jedes Element einer Abelschen Gruppe von der Ordnung $a_1 a_2 \cdots a_n$ sich auf eine und nur eine Weise in der Gestalt

$$A_1^{\alpha_1}\, A_2^{\alpha_2} \cdots A_n^{\alpha_n} \qquad (0 \leqq \alpha_\nu < a_\nu) \tag{4}$$

darstellen läßt, so ist für wenigstens einen Index ν

$$a_\nu^{a_\nu} = 1." \tag{5}$$

Der Beweis dieses gruppentheoretischen Satzes ist nun nicht einfach und kann hier auch nicht andeutungsweise wiedergegeben werden. Gesagt sei nur, daß Verf. ihn auf den Spezialfall zurückführt, daß die a_ν Primzahlen sind, wobei aber die Dimensionszahl n vergrößert wird. Die Durchführung des Beweises erfordert über ein Dutzend Hilfssätze, zum Teil sehr einfache, fast triviale, zum Teil schwierige, dann aber durch die vorausgehenden gut vorbereitete, so daß eine vorbildlich lückenlose Beweiskette entsteht und auch beim kritischsten Leser niemals Zweifel an der Stichhaltigkeit entstehen können.

Nebenbei behandelt Verf. auch die Frage, ob die Anordnung der Würfel immer balkenförmig sein muß, wenn sie den R_n mehrfach, etwa k-fach, bedecken. Das läuft darauf hinaus, ob, wenn jedes Element einer Abelschen Gruppe auf genau k verschiedene Arten in der Gestalt (4) darstellbar ist, dann ebenfalls die Beziehung (5) für wenigstens einen Index ν gelten muß. Verf. zeigt, daß das nur für $n \leqq 3$ der Fall ist. Für $n = 4$ wird dagegen ein Beispiel mit $k = 9$ gegeben, bei dem das nicht zutrifft, und daraus folgt dann, daß es für $n > 4$ erst recht solche nicht balkenförmige Würfelanordnungen gibt. Vgl. die folgende Besprechung.

Reviewer: Perron, O., Prof. (München)

Full Text: DOI Link EuDML

References:

[1] D. Derry, Remarks on a conjecture ofMinkowski. Amer. J. of Math.62 (1940), S. 61-66. · Zbl 0022.20204 · doi:10.2307/2371434

[2] G. Haj?s, T?bbm?ret? terek befed?se kockar?ccsal. Mat. fiz. lapok45 (1938), S. 171-190. (Ungarisch mit deutschem Auszug.)

[3] G. Haj?s, T?bbm?ret? terek egyszeres befed?se kockar?ccsal. Mat. fiz. lapok48 (1941), S. 37-64. (Ungarisch mit deutschem Auszug.)

[4] H. Jansen, L?ckenlose Ausf?llung desR n mit gitterf?rmig angeordnetenn-dimensionalen Quadern. Diss. Kiel (1909).

[5] O.-H. Keller, ?ber l?ckenlose Erf?llung des Raumes mit W?rfeln. Journ. f?r r. u. a. Math.163 (1930), S. 231-248.

[6] O.-H. Keller, Ein Satz ?ber die l?ckenlose Erf?llung des 5- und 6-dimensionalen Raumes mit W?rfeln. Journ. f?r r. u. a. Math.177 (1937), S. 61-64. · Zbl 63.0585.05

[7] J. F. Koksma, Diophantische Approximationen. Ergebn. d. Math. IV,4 (1936), S. 15-16.

[8] B. Levi, Un teorema delMinkowski sui sistemi di forme lineari a variabili intere. Rend. Circ. Mat. Palermo31 (1911), S. 318-340. · Zbl 42.0227.01 · doi:10.1007/BF03018807

[9] H. Minkowski, Geometrie der Zahlen (1896). · Zbl 0050.04807

[10] H. Minkowski, Diophantische Approximationen (1907).

[11] L. J. Mordell, Minkowskis theorems and hypotheses on linear forms. C. R. du Congr. Internat. Oslo 1936, I, S. 226-238.

[12] S. L. van Oss, Over een stelling vanMinkowski. Hand. 15. Nat. Congr. Amsterdam 1915, S. 192-193.

[13] O. Perron, ?ber l?ckenlose Ausf?llung desn-dimensionalen Raumes durch kongruente W?rfel. I?II. Math. Zeitschr.46 (1940), S. 1-26, 161-180. · Zbl 0022.20205 · doi:10.1007/BF01181421

[14] O. Perron, Modulartige l?ckenlose Ausf?llung desR n mit kongruenten W?rfeln. I?II. Math. Annalen117 (1940), S. 415-447; (1941), S. 609-658. · Zbl 66.0180.01 · doi:10.1007/BF01450026

[15] Th. Schmidt, ?ber l?ckenlose Zerlegung desn-dimensionalen Raumes in gitterf?rmig angeordnete W?rfel. Schriften math. Sem. Univ. Berlin I, 6 (1933).

[16] C. L. Siegel, Neuer Beweis des Satzes vonMinkowski ?ber lineare Formen. Math. Annalen87 (1922), S. 36-38. (Nur eine Fu?note bezieht sich auf die Vermutung.) · Zbl 48.0166.02 · doi:10.1007/BF01458034