Chevalley, C.
La théorie du corps de classes. (French) JFM 66.0122.02
Ann. Math., Princeton, (2) 41, 394-418 (1940).

Die Arbeit hat sich zur Aufgabe gemacht, den Leser in eine Anzahl neu entwickelter Begriffe einzuführen; sie beruht auf der einen Seite auf *Hasse*, Klassenkörpertheorie (1933; F. d. M. 59_{I}, 189) -zitiert kurz als *Hasse*, weiter auf der These des Verf. in J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, I 2 (1933), 365-476 (F. d. M. 59_{I}, 190), zitiert als These. Herangezogen werden zahlreiche Sätze aus der Arbeit von *Krull*, Math. Ann., Berlin, 100 (1928), 687-698 (F. d.M. 54, 157) über die Gruppen von algebraischen Körpern unendlichen Grades.

In § 1 wird vom Kompositum aller abelschen Erweiterungen endlichen Grades über einem algebraischen Körper endlichen Grades ausgegangen. Dieses Kompositum A_K ist also über K abelsch von unendlichem Grade und besitzt eine Automorphismengruppe $\mathfrak{G}_K$, die nur Charaktere endlicher Ordnung hat. Ein solcher Charakter χ ruft eine Untergruppe $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{G}_K$ aller s in $\mathfrak{G}_K$ mit $\chi(s) = 1$ hervor mit endlicher zyklischer Faktorgruppe $\mathfrak{G}_K/\mathfrak{H}$; der zu $\mathfrak{H}$ in A_K gehörige Körper Z_χ/K, ist daher über K zyklisch von endlichem Grade. – Ist Ω eine beliebige Erweiterung endlichen Grades von K, und definieren wir $\mathfrak{G}_\Omega$, A_Ω analog $\mathfrak{G}_K$, A_K, so ruft jedes Element $\bar{s}$ von $\mathfrak{G}_\Omega$ einen Automorphismus s von $\mathfrak{G}_K$ hervor. Durch $\chi(s) = \bar{\chi}(\bar{s})$ können wir einem Charakter χ von $\mathfrak{G}_K$ einen Charakter $\bar{\chi}$ von $\mathfrak{G}_\Omega$ zuordnen. Verf. schreibt $\bar{\chi} = N_{K/\Omega}\chi$.

§ 2 behandelt die Gruppe der Idele (idèles). Wir denken uns in K alle endlichen und unendlichen Primstellen wohlgeordnet. Erweitern wir durch $\mathfrak{p}$-adische Bewertung den Körper K zu den Körpern $K_\mathfrak{p}$, deren multiplikative Gruppe mit $K_\mathfrak{p}^*$ und deren Einheitengruppe mit $U_\mathfrak{p}$ bezeichnet werde, so bezeichnen wir als Idel einen Vektor mit abzählbar unendlich vielen Koordinaten, die jeweils zu den Primstellen $\mathfrak{p}$ zugeordnet, Zahlen ($\neq 0$) aus $K_\mathfrak{p}^*$ und fast alle aus dem betreffenden $U_\mathfrak{p}$ sind. Die Multiplikation von Idelen erfolgt durch Multiplikation der Koordinaten. Die Idele mit lauter gleichen Koordinaten $\alpha \in K$ heißen Hauptidele, die mit lauter Koordinaten 1 außer der für ein bestimmtes $\mathfrak{p}$, wo die Koordinate mit der eines gegebenen Idels $\mathfrak{a}$ zusammenfällt, die $\mathfrak{p}$-Komponenten von $\mathfrak{a}$; Verf. bezeichnet sie mit $\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$. Die Idele bilden bezüglich Multiplikation eine Gruppe J_K, die Hauptidele die Untergruppe P_K, und mit entsprechender Abstraktion kann man letztere den Zahlen von K, ebenso die $\mathfrak{p}$-Komponenten den $\mathfrak{p}$-Koordinaten gleichsetzen. E sei eine Menge von Primstellen, darunter alle unendlichen, J_K^E die Gruppe aller Idele, deren $\mathfrak{p}$-Komponenten für $\mathfrak{p}$ nicht in E nach $U_\mathfrak{p}$ fallen; dann ist J_K/J_K^E endlich, und durch Aufnahme endlich vieler endlicher Primstellen in die Menge E kann man erreichen, daß $J_K^E P_K = J_K$ ist.

In § 4 definiert Verf. ein Differential als einen Charakter φ von J_K, der für alle Elemente von P_K gleich 1 ist. Ist $\Omega \supset K$ von endlichem Grade, so bezeichnet Verf. ein Differential φ_Ω in Ω, das durch $\varphi_\Omega(\mathfrak{A}) = \varphi(N_{\Omega/K}\mathfrak{A}$ für ein beliebiges $\mathfrak{A}$ aus J_Ω durch ein Differential φ von K definiert wird, als $N_{K/\Omega}\varphi$. Ein Differential von K bewirkt in $K_\mathfrak{p}$ einen Charakter $\varphi_\mathfrak{p}$, der die $\mathfrak{p}$-Komponente von φ heißt. Ist $\varphi_\mathfrak{p}$ nicht für alle Elemente von $U_\mathfrak{p}$ gleich 1, so heißt φ in $\mathfrak{p}$ verzweigt. Ist $\varphi_\mathfrak{p} = 1$ mit Ausnahme eines einzigen $\mathfrak{p}$, so heißt φ ein lokaler Charakter.

In § 5 wird der folgende Beweisgang kurz umrissen: Hauptaufgabe ist der Nachweis einer 1-Isomorphie zwischen der Gruppe der Charaktere und der Gruppe der Differentiale.

Hierzu wird in § 6 für zyklisches Z/K die Formel für den Gruppenindex (links) und den Körpergrad (rechts)

$$[K_\mathfrak{p}^* : K_\mathfrak{p}^* \frown N_{Z/K} J_Z] = [ZK_\mathfrak{p} : K_\mathfrak{p}]$$

($\frown$ Durchschnittsbildung) bewiesen. Bei diesem Beweis sowie in § 7 spielt das *Herbrand*sche Reduktionsprinzip (vgl. *Hasse*, 130) eine Hauptrolle. § 7 beweist, daß für $[Z : K] = n$ die Zahl der Z/K assoziierten Differentiale, d. h. der Differentiale von K, die für die Idelnormen von Z/K gleich 1 sind, durch n teilbar ist. Ist E eine Menge von $s + 1$ Primstellen des Körpers K, darunter allen unendlichen, J_K^E dieselbe Idelmenge wie früher, $J_K^{E_n}$ die Teilmenge von J_K^E mit n-ten Potenzen von Zahlen aus $K_\mathfrak{p}$ für alle $\mathfrak{p}$ aus E als $\mathfrak{p}$-Koordinaten, so zeigt § 8, daß der Index $[J_K^E : J_K^{E_n}] = n^{2(s+1)}$ ist. § 9 zeigt dann, daß die in § 7 genannte Zahl ein Teiler von n ist, also mit n zusammenfällt. Die folgenden Paragraphen entsprechen in wesentlichen Teilen der These des Verf.

Der Hauptfortschritt liegt gegenüber der These in der außerordentlich weitgehenden rein abstrakten Fassung des Idelbegriffs, sowie in der restlosen Ausschaltung aller transzendenten Hilfsmittel, die ja mit der Klassenkörpertheorie im Kleinen, gefühlsmäßig betrachtet, nichts zu tun haben. Sogar Hilfssätze, wie daß es bei zyklischem Z/K in K stets unendlich viele Primideale gibt, die beim Übergang zu Z Primideale bleiben, werden durch geschickte Verwendung des Idelbegriffs ohne transzendente Hilfsmittel bewiesen.

Eine hochinteressante Arbeit von sehr großer Tragweite, die höchste Beachtung verdient.

Reviewer: Holzer, L., Dr. (Graz)

Full Text: DOI