Morse, M.; **Hedlund, G. A.**

Symbolic dynamics II. Sturmian trajectories. (English) JFM 66.0188.03

Amer. J. Math. 62, 1-42 (1940).

Mit zwei Symbolen a, b werden ein- oder zweiseitig unendliche Reihen der Form

$$\cdots aB_{-1}aB_0aB_1a\cdots \tag{1}$$

gebildet, wo die B_ν endliche Mengen von b sind (auch leere zugelassen). Ein mit a beginnender und endigender Abschnitt einer solchen Reihe heißt eine Kette, und zwar n-Kette, wenn sie n Symbole B_ν enthält. Die Gesamtzahl aller b in einer Kette heißt ihre b-Länge. Die Reihe heißt eine *Sturm*sche Reihe, wenn für jedes feste n die b-Längen von je zwei darin enthaltenen n-Ketten sich höchstens um 1 unterscheiden. Wenn aus einer Sturmschen Reihe für jedes n eine n-Kette ausgewählt wird und ihre b-Länge mit b_n bezeichnet wird, so existiert der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n}=\alpha$$

und ist unabhängig von der Auswahl. α heißt die Frequenz der Reihe. Die Reihen zeigen verschiedenes Verhalten, je nachdem α rational oder irrational ist. Eine Sturmsche Reihe heißt rekurrent, wenn zu jedem n ein m ($\geqq n$) existiert derart, daß jede in der Reihe enthaltene m-Kette zu jeder in der Reihe enthaltenen m-Kette ein kongruentes Bild enthält. Die kleinste derartige Zahl m hängt nur von n und α ab und wird mit $R(n,\alpha)$ bezeichnet. Einige Eigenschaften dieser "Rekurrenzfunktion" werden aufgestellt. Z. B. gilt der Satz: Ist $\Phi(x)$ eine mit x monoton ins Unendliche wachsende Funktion, so ist für fast alle α

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{R(n,\alpha)}{n\Phi(\log n)}$$

endlich oder unendlich, je nachdem die Reihe $\sum\Phi(n)^{-1}$ konvergiert oder divergiert. Eine Sturmsche Reihe der Frequenz α entsteht z. B., wenn man die Zahlen

$$\ldots, c-\frac{2}{\alpha},\ c-\frac{1}{\alpha},\ c,\ c+\frac{1}{\alpha},\ c+\frac{2}{\alpha},\ldots \tag{2}$$

betrachtet und in der Reihe (1) für B_n soviele b schreibt, wie Zahlen der Menge (2) im Intervall $n\leqq x<n+1$ liegen. Dadurch ahnt man einen Zusammenhang mit diophantischen Approximationen und Kettenbrüchen, der zu einigen Sätzen über die Rekurrenzfunktion führt. Eine Sturmsche Reihe entsteht auch, wenn man ein Integral der Differentialgleichung $y''+f(x)y=0$ betrachtet, wo $f(x)$ die Periode 1 hat (alles reell) und wenn man in der Reihe (1) für B_n soviele b schreibt, wie Nullstellen des Integrals im Intervall $n\leqq x<n+1$ liegen. Das folgt aus dem Sturmschen Trennungssatz und mag den Namen "Sturmsche Reihe" und wohl auch den Titel "Symbolische Dynamik" veranlaßt haben. Besondere Konsequenzen werden aber aus diesem Zusammenhang nicht gezogen.

Reviewer: Perron, O., Prof. (München)

Full Text: DOI