Potter, H. S. A.

The mean values of certain Dirichlet series. I, II. (English) JFM 66.0340.01

Proc. London math. Soc. (2) 46, 467-478 (1940); (2) 47, 1-19 (1940).

Die asymptotische Formel

$$\int_{-T}^{T} |f(\sigma+it)|^2\,dt \sim 2T\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2 l_n^{-2\sigma}$$

für die Dirichletreihe $f(s)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n l_n^{-s}$ gelte für $\sigma>\sigma_m$. Für 1) $a_n = O\left(l_n^{h+\varepsilon}\right)$, 2) $\log l_n - \log l_{n-1} > l_n^{-(l+\varepsilon)}$ hat *F. Carlson* (Ark. Mat. Astron. Fysik. A 19 (1926), Nr. 25; F. d. M. 52, 329 (JFM 52.0329.*)) die Ungleichung $\sigma_m \leqq L\dfrac{L-\eta}{\lambda(\eta)}$ mit $L=\frac{1}{2}(\overline{\sigma}+h+l)$ bewiesen; dabei ist η eine solche reelle Zahl, daß $f(\eta+it)$ endlich ist, $\overline{\sigma}$ ist die Abszisse absoluter Konvergenz, und $\lambda(\eta)$ bedeutet die kleinste Zahl, so daß

$$\int_{-T}^{T} |f(\eta+it)|^2\,dt = O(T^{\lambda(\eta)})$$

gilt. Verf. ersetzt die Bedingung 1) durch $\sum\limits_{l_n\leqq x}|a_n|^2 = O(x^{k+\varepsilon})$ und findet mit $L=\frac{1}{2}(k+l)$ dieselbe Abschätzung für σ_m. Zum Beweis zeigt Verf. einige Hilfssätze unter Benutzung Landauscher Ergebnisse und Methoden.

Durch Anwendung auf Heckesche Dirichletreihen, die einer Funktionalgleichung

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{-s}\Gamma(s)f(s) = \pm\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{-(k-s)}\Gamma(k-s)f(k-s)$$

genügen, erhält man zwei Darstellungen für $s>\dfrac{k}{2}$ und $s<\dfrac{k}{2}$.

Der Fall $\sigma=\dfrac{k}{2}$, der im zweiten Teil betrachtet wird unter Benutzung von Methoden von *E. C. Titchmarsh* (Proc. London math. Soc. (2) 27 (1927), 137-150; F. d. M. 53, 313 (JFM 53.0313.*)), ergibt für Dirichletreihen mit reellen Koeffizienten

$$\int_{0}^{T}\left|f\left(\frac{k}{2}+it\right)\right|^2 dt \sim 2kT\int_{1}^{x} L(t)t^{-1}\,dt;$$

dabei ist mit $\sum\limits_{n<x}|a_n|^2 \sim x^k L(x)$ die Funktion $L(x)$ eine langsam wachsende Funktion (vgl. *J. Karamata*, Mathematica, Cluj, 4 (1930), 38-53; JFM 56.0907.*), über deren Eigenschaften zahlreiche Hilfssätze bewiesen werden. Es werden entsprechende Aussagen für zwei Dirichletreihen $f_1(s), f_2(s)$ bewiesen, die durch eine Funktionalgleichung $f_1(s)=H(s)f_2(k-s)$ verbunden sind; dabei ist $H(s)=O\left(|t|^{c\left(\frac{k}{2}-\sigma\right)}\right)$ mit $c>0$. Die Entwicklungskoeffizienten müssen nicht notwendig reell sein. Anwendungen auf ζ- und L-Funktionen und gewisse Dirichletreihen, die Modulformen zugeordnet sind, bilden den Schluß.

Reviewer: Schulenberg, Elisabeth, Dr. (Berlin)

Full Text: DOI