Beurling, A.

Ensembles exceptionnels. (Swedish) JFM 66.0449.01

Acta math., Uppsala, 72, 1-13 (1940).

Verf. nennt "ensemble exceptionnel" E_f einer summierbaren Funktion $f(x)$ die Menge der x, für die die symmetrische Ableitung des Integrals von $f(x)$

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{2h} \int\limits_{x-h}^{x+h} f(x)\,dx$$

nicht existiert oder endlich ist. Nach dem Satz von Lebesgue besitzt E_f das lineare Maß Null, darüber hinaus weiß man im allgemeinen Falle nichts. Durch Spezialisierung der Funktionenklasse $f(x)$ können aber weitere interessante metrische Eigenschaften der Menge E_f abgeleitet werden. Verf. untersucht die Klasse der quadratisch summierbaren Funktionen $f(\theta)$ mit der Periode 2π, für die das Integral

$$S(f) = \frac{1}{2\pi^2} \int\limits_0^{\infty} \int\limits_0^{2\pi} \frac{|\, f(\theta+t) - f(\theta-t)\,|^2}{t^2}\,dt\,d\theta$$

endlich ist, und zeigt, daß in diesem Falle E_f identisch ist mit der Menge, auf der die Fouriersche Reihe von $f(\theta)$ divergent ist, und daß diese Menge, auf dem Einheitskreis betrachtet, von der äußeren Kapazität Null ist. Ein wichtiges Hilfsmittel beim Beweis dieses Satzes ist die folgende Tatsache: Sei $u(r,\theta)$ das logarithmische Potential einer Belegung μ von der Gesamtmasse eins auf dem Rande des Einheitskreises, dann ist $S(u)$ gleich der doppelten potentiellen Energie von μ und ist folglich immer beschränkt, wenn das Potential beschränkt ist. Verf. macht interessante funktionentheoretische Anwendungen seiner Resultate. Er beweist unter anderem die folgende Verallgemeinerung des Satzes von Fatou: Sei $f(z)$ eine meromorphe Funktion im Einheitskreis, die eine Abbildung dieses Kreises auf eine Riemannsche Fläche von *endlichem* sphärischem Inhalt vermittelt, dann existiert der radiale Grenzwert $\lim\limits_{r\to 1} f(re^{i\theta})$ überall auf dem Rande des Kreises höchstens mit Ausnahme einer Menge der äußeren Kapazität Null.

Reviewer: Frostman, O., Dr. (Lund)

Full Text: DOI

References:

[1] Extension de la méthode du balayage de Poincaré et problème de Dirichlet, Annales de l'Inst. H. Poincaré, t. 2 (1932), p. 226 où la définition est donnée pour la capacité newtonienne.

[2] Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles, Thèse, Lund (1935).

[3] Über gewisse Potenzreihen an der Konvergenzgrenze, Berichte d. Bayer. Akad. 3., (1910). · Zbl 41.0284.01

[4] Séries trigonométriques et séries de Taylor. Acta math., t. 30, (1906).

[5] La démonstration va paraître dansArkiv för Matematik, ...

[6] Cf. Polya etSzegö,Über den transfiniten Durchmesser,Journ. de Crelle t. 165 (1931) p. 43, etFrostman l. c., p. 90.

[7] Cf. l. c., l'exemple donné à la page 39.

[8] Cf. l. c..

[9] Über die Randwerte analytischer Funktionen. C. R. du 4ème Congr. scand. Stockholm, (1916).

[10] Über eine Klasse von meromorphen Funktionen. Math. Ann. 92, (1924). · Zbl 50.0222.02