Doob, J. L.

The law of large numbers for continuous stochastic processes. (English) JFM 66.0621.01

Duke math. J. 6, 290-306 (1940).

$\{f_m(x)\}$ sei eine Folge meßbarer Funktionen ($m = 1, 2, \ldots$), $E_1, \ldots, E_n$ seien Borelmengen; $h \geqq 0$ und $0 \leqq \alpha_1 < \cdots < \alpha_n$ seien ganze Zahlen; W_h sei durch $f_{a_{j+h}}(x) \in E_j$ ($j = 1, 2, \ldots, n$) definiert, und es sei eine nichtnegative Maßfunktion $M(W)$ definiert. Wenn $M(W_h)$ nicht von h abhängt, wird gesagt, die Folge $\{f_m(z)\}$ habe die Eigenschaft H. – Analog wird bei einer einparametrigen Funktionenschar $f_t(x)$ ($0 \leqq t < \infty$) vorgegangen, nur brauchen hier $h, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ nicht ganze Zahlen zu sein; auch negative Werte von t können zugelassen werden.

Theorem I, welches das Birkhoffsche Ergodentheorem enthält: $\{f_m(x)\}$ habe die Eigenschaft H, $f_0(x)$ sei integrabel. Dann existiert fast überall $\lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{1}{N} \sum\limits_1^N f_m(x)$.

Theorem II stellt ähnlich für eine Schar $f(t,x)$ die Existenz von $\lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T f(t,x)\,dt$ fest.

Theorem III: Für die stochastischen Veränderlichen $\{x_t\}$ eines meßbaren zeitlich homogenen Prozesses existiert mit der Wahrscheinlichkeit 1 der $\lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T x_t\,dt$, wenn $\mathfrak{E}(x_0)$ existiert.

Weiterhin werden stochastische Differentialprozesse betrachtet, für deren stochastische Veränderliche $\{x_t\}$ gilt: Für beliebige $t_1 < t_2 < \cdots < t_\nu$ sind $x_{t_2} - x_{t_1}, \ldots, x_{t_\nu} - x_{t_{\nu-1}}$ unabhängige stochastische Veränderliche. Von den im ganzen 11 Theoremen sei hier als Beispiel nur noch

Theorem V angeführt: $\{x_t\}$ gehöre zu einem Differentialprozeß, $\mathfrak{E}(x_t - x_0) = e(t)$ existiere für genügend große Werte von t und $-t$. Dann existiert $e(t)$ für alle Werte von t, und der Prozeß mit den stochastischen Veränderlichen $y_t = x_t - x_0 - e(t)$ ist zentriert.

Reviewer: Iglisch, R., Prof. (Braunschweig)

Full Text: DOI