Grün, O.
Zusammenhang zwischen Potenzbildung und Kommutatorbildung. (German)
JFM 66.1201.03
J. reine angew. Math. 182, 158-177 (1940).

Es sei $\mathfrak{F}$ die freie Gruppe mit endlich vielen Erzeugenden, ferner $\mathfrak{F}(m)$ die Untergruppe, welche von den m-ten Potenzen aller Elemente erzeugt wird. Dann vermutete Burnside, daß $\mathfrak{F}/\mathfrak{F}(m)$ endlich ist, ferner daß diese Faktorgruppe auflösbar ist, falls m ungerade ist. Für $m = 2$ ergibt sich ohne weiteres, daß sie abelsch vom Typus $(2, 2, \dots)$ ist. Daraus folgt, daß die Kommutatorgruppe jeder Gruppe sich durch Quadrate von Elementen erzeugen läßt, z. B. $(T, S) = T^{-1}S^{-1}TS = T^{-2}(TS \cdot S^{-2}T^{-1})^2(TS)^2$. Verf. behandelt den Fall der Primzahlpotenzen $m = p^i$. Hier ist die Faktorgruppe, falls sie endlich ist, jedenfalls auflösbar, und die sogenannte absteigende Zentrenreihe spielt die Hauptrolle: $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_3, \dots$, wo $\mathfrak{G}_n$ durch die Kommutatoren von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{G}_{n-1}$ erzeugt wird. Aus der Theorie der Dimensionsgruppen von *Magnus* (Math. Ann., Berlin, 111 (1935), 259-280; F. d. M. 61_{I}, 102) entnimmt Verf., ohne den Beweis anzugeben, den Satz, daß die Elemente von $\mathfrak{G}_n$ durch die Eigenschaft charakterisiert werden, daß sie der Kongruenz genügen $G \equiv 1\ (\mathfrak{L}^n)$, wo $\mathfrak{L}$ das Primideal des Gruppenringes $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{G}$ bedeutet, das durch alle $G - 1$ erzeugt wird. Hilfssatz 1: Wenn $\mathfrak{R}$ auf $\mathfrak{R}/p_i\mathfrak{L}$ abgebildet wird, so ist das Bild von $\mathfrak{G}$ isomorph mit $\mathfrak{G}$. Nun bezeichne (T, S, n) den Kommutator $(T, S, S, \dots, n\text{-mal})$, ferner sei $\mathfrak{U}$ die durch S und T erzeugte Untergruppe von $\mathfrak{G}$, dann ergeben sich Sätze von der Art:

$$(T, S, 2\nu p^\nu - 2(\nu - 1)p^{\nu-1} - 1)^{p^{i-\nu}} \equiv 1(\mathfrak{U}_{2\nu p^\nu - 2(\nu-1)p^{\nu-1}+1}),$$

woraus speziell folgt $(T, S, p - 1)^{p^{i-1}} \equiv 1(\mathfrak{G}_{p+1})$, ein Satz, der für $i = 1$ schon von Zassenhaus bewiesen wurde. Ferner ergibt sich

$$\prod (T, S_1, \dots, S_{p-1})^{p^{i-1}} \equiv 1(\mathfrak{G}_{p+1}),$$

wobei das Produkt über alle Permutationen von $S_1, S_2, \dots, S_{p-1}$ erstreckt wird. Formeln, bei denen nicht über alle Permutationen multipliziert wird, werden in § 2 hergeleitet. Schließlich wird bewiesen, daß die abelsche Faktorgruppe $\mathfrak{G}_{p+1}\mathfrak{G}^2/\mathfrak{G}_{p+2}$ höchstens vom Typus $(p^{i-1}, p^{i-1}, \dots)$ ist.

Reviewer: Speiser, A., Prof. (Zürich)

Full Text: DOI Crelle EuDML