Baer, R.

The significance of the system of subgroups for the structure of the group. (English)

JFM 65.0060.01
Amer. J. Math. 61, 1-44 (1939).

Eine Abbildung f der Untergruppen einer Gruppe G auf die Untergruppen einer Gruppe G' heißt Untergruppen- oder Teilerisomorphismus, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(a) S^f ist eine Untergruppe von G' für jede Untergruppe S von G.

(b) Zu jeder Untergruppe S' von G' gibt es eine Untergruppe S von G, so daß $S^f = S'$.

(c) Dann und nur dann ist $S \subseteq T$, wenn $S^f \subseteq T^f$.

Der Teilerisomorphismus f heißt indexerhaltend, wenn $[T : S] = [T^f : S^f]$ für alle Untergruppen S aller zyklischen Untergruppen T von G. f heißt normal, wenn S genau dann Normalteiler von G ist, wenn S' Normalteiler von G' ist.

Die vorliegende Arbeit enthält Untersuchungen zu der Frage, wann zwei teilerisomorphe Gruppen schlechthin isomorph sind. Die Ergebnisse sind:

Der Teilerisomorphismus f von G wird durch einen gewöhnlichen Isomorphismus von G induziert, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(1) G ist eine Hamiltonsche Gruppe, und alle Elemente haben gerade Ordnung.

(2) G ist abelsch und enthält wenigstens zwei unabhängige Elemente unendlicher Ordnung.

(3) G ist abelsch, enthält keine Elemente unendlicher Ordnung, enthält Elemente der Ordnung p^2, wenn es Elemente der Primzahlordnung p enthält, und es enthält mindestens drei unabhängige Elemente der Ordnung n, wenn es überhaupt Elemente der Ordnung n enthält.

(4) G ist abelsch, alle vom Einheitselement verschiedenen Elemente haben die gleiche Ordnung p, G enthält wenigstens p^3 Elemente, und alle vom Einheitselement verschiedenen Elemente von G^f haben die gleiche Ordnung.

Weiter ergibt sich: Der Teilerisomorphismus f von G auf H ist ein gewöhnlicher Isomorphismus, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(5) G und H sind abelsch, G enthält keine Elemente unendlicher Ordnung, und die Anzahl der Elemente der Ordnung p von G ist nicht gleich p.

(6) G und H sind abelsch, G enthält Elemente unendlicher Ordnung, und der Teilerisomorphismus f ist indexerhaltend.

(7) G ist abelsch, enthält keine Elemente unendlicher Ordnung, und der Teilerisomorphismus f ist indexerhaltend und normal.

Durch Beispiele wird gezeigt, daß diese Bedingungen in dem Sinne scharf sind, daß aus keiner eine Teilaussage fortgelassen werden kann.

Reviewer: Kochendörffer, R., Dr. (Berlin)

Full Text: DOI