Dubreil, P.; **Dubreil-Jacotin, M.-L.**
Théorie algébrique des relations d'équivalence. (French) JFM 65.0080.01
J. Math. pur. appl., Paris, (9) 18, 63-95 (1939).

In dieser Arbeit wird in sehr klarer Weise eine Theorie der reflexiven, symmetrischen und transitiven Äquivalenzrelationen zwischen den Elementen einer beliebigen Menge E dargestellt.

Jede Einteilung der Elemente von E in paarweise elementefremde Klassen definiert eine derartige Relation R durch die Festsetzung, daß genau dann $a \equiv b\,(R)$ gelten soll, wenn a und b der gleichen Klasse angehören. Umgekehrt entspricht jeder Äquivalenzrelation der betrachteten Art eine Klasseneinteilung. Die Relation R_i heißt Folgerelation der Relation R_k ($R_i \supset R_k$), wenn aus $a \equiv b\,(R_k)$ stets $a \equiv b\,(R_i)$ folgt, wenn also jede zu R_k gehörende Klasse ganz in einer zu R_i gehörenden enthalten ist. Ferner werden Durchschnitt und Produkt zweier (und mehrerer) Relationen definiert: Für den Durchschnitt $D = R_i \cap R_k$ gilt genau dann $a \equiv b\,(D)$, wenn $a \equiv b\,(R_i)$ und $a \equiv b\,(R_k)$. Das Produkt $P = R_i \times R_k$ ist der Durchschnitt aller Folgerelationen von R_i und R_k. Die Relationen bilden also eine Struktur im Sinne von *Ore* (Ann. Math., Princeton, (2) 36 (1935), 406-437; F. d. M. 61_{I}, 111).

Ein weiterer wichtiger Begriff ist der der Verknüpfbarkeit. R_i und R_k heißen verknüpfbar, wenn es zu je drei Elementen a, b, c, für welche
$$a \equiv c(R_i), \quad c \equiv b(R_k)$$
gilt, stets ein Element d gibt mit
$$a \equiv d(R_k), \quad d \equiv b(R_i).$$
Betrachtet man in einer Gruppe die durch Nebengruppenbildung nach zwei Untergruppen $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$ definierten Äquivalenzrelationen, so sind sie genau dann verknüpfbar, wenn $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$ im Sinne der Komplexmultiplikation miteinander vertauschbar sind.

Die Struktur aller Relationen R mit $R_i \times R_k \supset R \supset R_i$ und die der Relationen R^* mit $R_k \supset R^* \supset R_i \cap R_k$, die mit R_i verknüpfbar sind, sind isomorph.

Schließlich wird eine Quotientenbildung für Relationen eingeführt, und mit ihrer Hilfe werden formale Analoga zu einigen gruppentheoretischen Isomorphieund Eindeutigkeitssätzen bewiesen. Für vier Relationen R_s, R_t, R_u, R_v mit $R_s \supset R_t$, $R_u \supset R_v$ werde
$$\frac{R_s}{R_t} \simeq \frac{R_u}{R_v}$$
geschrieben, wenn sich für je zwei Klassen S nach R_s und U nach R_u, die mindestens ein gemeinsames Element haben, die in S enthaltenen Klassen nach R_t und die in U enthaltenen nach R_v eineindeutig einander zuordnen lassen. Für zwei verknüpfbare Relationen R_i und R_k erhält man
$$\frac{R_i \times R_k}{R_i} \simeq \frac{R_k}{R_i \cap R_k}.$$
Für zwei Folgen $R_1 \supset R_2 \supset \cdots \supset R_s$ und $P_1 \supset P_2 \supset \cdots \supset P_t$ mit $R_1 = P_1$, $R_s = P_t$, in denen R_i verknüpfbar ist mit $R_{i-1} \cap P_k$ und P_k mit $P_{k-1} \cap R_i$ ($i = 2, \ldots, s$; $k = 2, \ldots, t$), gilt eine dem Verfeinerungssatz der Gruppentheorie entsprechende Aussage mit der Beziehung $\simeq$ an Stelle der Isomorphie bei dem gruppentheoretischen Satz.

Die Ergebnisse dieser Arbeit berühren sich zum Teil mit der allgemeinen Theorie der Strukturen von Ore und Birkhoff. Dadurch aber, daß die Verf. in dieser Arbeit stets die Relationen als konkretes Bild im Auge behalten, wird, wie es scheint, ein Gewinn an Anschaulichkeit erzielt, insbesondere auch, was die Voraussetzungen (Verknüpfbarkeit) anbetrifft.

Reviewer: Kochendörffer, R., Dr. (Berlin)