Schmidt, F. K.

Die Wronskische Determinante in beliebigen differenzierbaren Funktionenkörpern. (German) JFM 65.0115.02

Math. Z. 45, 62-74 (1939).

Es sei K ein Körper, in dem eine iterative Differentiation erklärt ist: Jedem Element y aus K ist eine Ableitungsfolge $y^{(0)} = y$, $y^{(1)} = y'$, $y^{(2)}$,...so zugeordnet, daß gilt:

$$\begin{array}{ll} \text{Summenregel} & (y_1 + y_2)^{(\nu)} = y_1^{(\nu)} + y_2^{(\nu)}, \\ \text{Produktregel} & (y_1 y_2)^{(\nu)} = \sum\limits_{\nu_1+\nu_2=\nu} y_1^{(\nu_1)} y_2^{(\nu_2)}, \\ \text{Iterationsregel} & (y^{(\mu)})^{(\nu)} = \binom{\mu+\nu}{\mu} y^{(\mu+\nu)}. \end{array}$$

Mit k sei der Teilkörper der absoluten Differentiationskonstanten c bezeichnet: $c^{(\nu)} = 0$ für alle $\nu \geqq 1$.

Für ein über k linear-abhängiges Elementsystem y_0,..., y_n aus K verschwindet die Determinante

$$\Delta_{0,\dots,n}(y_0, \dots, y_n) = \left| y_i^{(j)} \right| \qquad (i, j = 0, \dots, n) \tag{1}$$

und allgemeiner auch jede Determinante

$$\Delta_{\nu_0,\dots,\nu_n}(y_0, \dots, y_n) = \left| y_i^{(\nu_j)} \right| \qquad (i, j = 0, \dots, n), \tag{2}$$

wo $\nu_0 \leqq \cdots \leqq \nu_n$ irgendwelche nicht-negative ganze Zahlen sind. Für ein über k linear-unabhängiges Elementsystem y_0,..., y_n aus K kann aber (1) ebenfalls verschwinden, wie einfache Beispiele mit K von Primzahlcharakteristik p zeigen. Verf. zeigt nun, daß es zu jedem System über k linear-unabhängiger y_0,..., y_n aus K ein System nicht-negativer ganzer Zahlen $\nu_0 \leqq \cdots \leqq \nu_n$ derart gibt, daß (2) nicht verschwindet. Das lexikographisch kleinste derartige Zahlsystem $(\nu_0, \dots, \nu_n)$ ändert sich nicht, wenn man von der gegebenen Differentiation mittels der Kettenregel zu einer anderen Differentiation übergeht. Hat K die Charakteristik 0, so enthält das Zahlsystem $(\nu_0, \dots, \nu_n)$ mit einer Zahl ν immer auch alle kleineren nicht-negativen ganzen Zahlen, es ist also einfach $(\nu_0, \dots, \nu_n) = (0, \dots, n)$, d. h. die gewöhnliche Wronskische Determinante (1) entscheidet über die lineare Abhängigkeit. Hat K Primzahlcharakteristik p, so enthält das Zahlsystem $(\nu_0, \dots, \nu_n)$ mit einer Zahl ν immer auch alle nicht-negativen ganzen Zahlen, deren p-adische Ziffern (aus der Reihe 0,..., $p-1$) einzeln nicht größer sind als die von ν. Jedes dieser Bedingung genügende Zahlsystem $(\nu_0, \dots, \nu_n)$ kommt auch wirklich bei einem geeigneten Elementsystem y_0,..., y_n aus K vor, wenn nur $K > k$ ist.

Reviewer: Hasse, Prof. (Halle an der Saale)

Full Text: DOI EuDML Link