Rankin, R. A.

Contributions to the theory of Ramanujan's function $\tau(n)$ and similar arithmetical functions. I: The zeros of the function $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\tau(n)}{n^s}$ on the line $\operatorname{Re}s=\frac{13}{2}$ II: The order of the Fourier coefficients of integral modular forms. (English) JFM 65.0353.01

Proc. Cambridge philos. Soc. 35, 351-356, 357-372 (1939).

I: Es sei $F(\tau)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a(n)e^{2\pi in\tau}$ eine (nicht identisch verschwindende) ganze Spitzenform der Modulgruppe und von der (negativen geraden) Dimension $-k$. Ihre Fourier-Koeffizienten genügen den Relationen

$$a(m)a(n)=a(mn)\quad\text{bei}\quad(m,n)=1,$$

$$a(p^\lambda)=a(p)a(p^{\lambda-1})-p^{k-1}a(p^{\lambda-2})\ (p\text{ Primzahl},\ \lambda\geqq 2).$$

Die $F(\tau)$ sind die Eigenfunktionen der sämtlichen Heckeschen Operatoren T_n, $n\geqq 1$. Die Dirichlet-Reihe $D(s)=\sum\limits_{\infty}^{n=1}a(n)n^{-s}$ ist für $\operatorname{Re}s>\frac{k+1}{2}$ absolut konvergent, genügt der Funktionalgleichung

$$R(s)=(2\pi)^{-s}\Gamma(s)D(s)=(-1)^{\frac{k}{2}}R(k-s)$$

und gestattet die Eulersche Produktentwicklung

$$D(s)=\prod_p\left(1-\frac{a(p)}{p^s}+\frac{p^{k-1}}{p^{2s}}\right)^{-1}.$$

Daher spielt der Streifen $\frac{k-1}{2}\leqq\operatorname{Re}s\leqq\frac{k+1}{2}$ die Rolle des kritischen Streifens der Riemannschen ζ-Funktion. Verf. beweist, daß $D(s)$ für $\operatorname{Re}s=\frac{k+1}{2}$ nicht verschwindet. (Das Nichtverschwinden für $\operatorname{Re}s>\frac{k+1}{2}$ folgt aus der absoluten Konvergenz des Eulerprodukts.) Der Beweis beruht, wie bei dem entsprechenden Satz über die Riemannsche ζ-Funktion, auf der Anwendung einer geeignet gewählten trigonometrischen Ungleichung, ist aber erheblich komplizierter als dort.

II: Es sei $H(\tau)$ eine ganze Spitzenform der vollen Modulgruppe Γ von der (negativen geraden) Dimension $-k$,

$$H(\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}a_ne^{2\pi in\tau},\quad f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2n^{-s}.$$

Die Dirichletreihe $f(s)$ konvergiert für $\sigma=\operatorname{Re}s>\ k$ absolut. Man hat mit $\tau=x+iy$ (x reell, $y>0$):

$$\int\limits_{-\frac12}^{+\frac12}|H(x+iy)|^2\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2e^{-4\pi ny}$$

und daher wogen $(4\pi)^{-s}\Gamma(s)n^{-s}=\int\limits_0^\infty e^{-4\pi ny}y^{s-1}\,dy$:

$$(4\pi)^{-s}\Gamma(s)f(s)=\iint\limits_{\mathfrak{B}}y^{s-1}|H(\tau)|^2\,dxdy=\iint\limits_{\mathfrak{B}}y^{s-k+1}|H(\tau)|^2y^k\,\frac{dxdy}{y^2},$$

wo $\mathfrak{B}$ den Vertikalhalbstreifen $|x|\leqq\frac12$, $y>0$ darstellt. Nun sind einerseits $|H(\tau)|^2y^k$ und $\frac{dxdy}{y^2}$ bei

Modulsubstitutionen invariant, und y^{s-k+1} nimmt bei $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ aus Γ den Faktor $|c\tau+d|^{-2s+2k-2}$ auf; andererseits überdecken die SD, wenn D einen Fundamentalbereich von Γ bezeichnet und S ein volles System von Modulsubstitutionen mit verschiedenen zweiten Zeilen $\{c, d\}$ durchläuft, den Streifen $\mathfrak{B}$ mod 1 genau zweimal einfach und lückenlos. Daraus folgt

$$(4\pi)^{-s}\Gamma(s)f(s) = \iint\limits_{\mathfrak{B}} y^{s-k+1}F(\tau)|H(\tau)|^2\, y^k\, \frac{dxdy}{y^2}$$

mit

$$F(\tau) = \sum_{(c,d)=1} |c\tau+d|^{-2s+2k-2}.$$

Hier läßt sich die Summationsbedingung $(c, d) = 1$ durch Multiplikation mit der Riemannschen Funktion $\zeta(2s-2k+2)$ beseitigen. Die entstehende Summe wird unter erneuter Heranziehung des Eulerschen Γ-Integrals durch

$$K(w) = K(w,\tau) = \sum_{\substack{m,\, n=-\infty \\ m,\, n\neq 0,\, 0}}^{+\infty} e^{-\frac{\pi w}{y}|m\tau+n|^2}$$

ausgedrückt. Das Verhalten dieser Funktion liefert die folgenden Ergebnisse:

$f(s)$ ist als meromorphe Funktion von s in die ganze s-Ebene fortsetzbar.

$$\varphi(s) = (2\pi)^{-2s}\Gamma(s)\Gamma(s-k+1)\zeta(2s-2k+2)f(s)$$

genügt der Funktionalgleichung $\varphi(s) = \varphi(2k-1-s)$ und ist bis auf die einfachen Pole $s = k$, $s = k-1$ regulär. $f(s)$ hat bei $s = k$ einen einfachen Pol mit dem Residuum

$$k\alpha = 12\frac{(4\pi)^{k-1}}{\Gamma(k)} \iint\limits_{D} |H(\tau)|^2 y^k \frac{dxdy}{y^2}.$$

Die genauere Diskussion der oben angedeuteten Integraldarstellung von $(4\pi)^{-s}\Gamma(s)f(s)$ führt mit Benutzung eines Landauschen Satzes zu der Aussage

$$\sum_{n\leqq x} |a_n|^2 = \alpha x^k + O(x^{k-\frac{2}{5}}),$$

so daß insbesondere $a_n = O\left(x^{\frac{k}{2}-\frac{1}{5}}\right)$ gegenüber $O\left(x^{\frac{k}{2}-\frac{1}{6}+\varepsilon}\right)$ als schärfste bisher bekannte Abschätzung folgt. Die Verallgemeinerung der ganzen Untersuchung auf Modulformen höherer Stufe liefert analoge Ergebnisse.

Reviewer: Petersson, H., Prof. (Straßburg)