Siegel, C. L.
Einführung in die Theorie der Modulfunktionen n-ten Grades. (German) JFM 65.0357.01
Math. Ann., Berlin, 116, 617-657 (1939).

Es bezeichnen $\mathfrak{A},\mathfrak{B},\mathfrak{C},\mathfrak{D},\dots$ n-reihige quadratische ganzzahlige Matrizen, $\mathfrak{E}$ die Einheitsmatrix, $\mathfrak{N}$ die Nullmatrix, $\mathfrak{U}$ eine unimodulare Matrix, $\mathfrak{Z}=\mathfrak{X}+i\mathfrak{Y}$ eine n-reihige veränderliche symmetrische Matrix mit $\mathfrak{Y}>0$ (d. h. die quadratische Form $\mathfrak{Y}[\mathfrak{x}]=\mathfrak{x}'\mathfrak{Y}\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}'=(x_1,\dots,x_n)$ ist positiv definit). Eine symmetrische Matrix $\mathfrak{T}$ heißt halbganz, wenn die Form $\mathfrak{T}[\mathfrak{x}]$ ganzzahlige Koeffizienten hat. Das Matrizenpaar $\mathfrak{C},\mathfrak{D}$ heißt symmetrisch, wenn $\mathfrak{C}\mathfrak{D}'=\mathfrak{D}C'$, teilerfremd, wenn aus der Ganzzahligkeit von $\mathfrak{G}\mathfrak{C}$, $\mathfrak{G}\mathfrak{D}$ die von $\mathfrak{G}$ folgt, und mit dem Matrizenpaar $\mathfrak{C}_1,\mathfrak{D}_1$ assoziiert, wenn $(\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1)=\mathfrak{R}(\mathfrak{C}\mathfrak{D})$ mit einer quadratischen Matrix $\mathfrak{R}$ vom Rang n. – Die Substitutionen $\mathfrak{M}=\begin{pmatrix}\mathfrak{A}&\mathfrak{B}\\ \mathfrak{C}&\mathfrak{D}\end{pmatrix}$, für welche $\mathfrak{M}\,\mathrm{Im}\,\mathfrak{M}'=\mathrm{Im}$ mit $\mathrm{Im}=\begin{pmatrix}\mathfrak{N}&\mathfrak{E}\\ -\mathfrak{E}&\mathfrak{N}\end{pmatrix}$, bilden bezüglich der Matrizenmultiplikation die Modulgruppe n-ten Grades Γ; sie ist mod $\pm\begin{pmatrix}\mathfrak{E}&\mathfrak{N}\\ \mathfrak{N}&\mathfrak{E}\end{pmatrix}$ isomorph der Gruppe der Abbildungen $\mathfrak{Z}\to(\mathfrak{A}\mathfrak{Z}+\mathfrak{B})(\mathfrak{C}\mathfrak{Z}+\mathfrak{D})^{-1}$, welche den Bereich P, definiert durch $\mathfrak{Z}=\mathfrak{Z}'$, $\mathfrak{Y}>0$, auf sich abbilden. Zur Konstruktion eines für funktionentheoretische Zwecke brauchbaren Fundamentalbereichs F für Γ in P wird die *Minkowski*sche Reduktionstheorie der quadratischen Formen herangezogen. F entsteht in der Weise, daß man in jeder Serie von äquivalenten Punkten $\mathfrak{Z}$ einen solchen mit maximalem $|\mathfrak{Y}|$ auswählt. Durch anschließende Reduktion mit Hilfe der affinen Substitutionen $(\mathfrak{Z}=\mathfrak{N})$ erreicht man, daß $\mathfrak{Y}$ die bekannten Minkowskischen Reduktionsbedingungen und $\mathfrak{X}=(x_{ik})$ die Ungleichungen $-\frac12<x_{ik}\leqq\frac12$ $(i,k=1,\dots,n)$ erfüllen. – $\varphi(\mathfrak{Z})$ heißt eine Modulform n-ten Grades vom Gewicht g (ganzzahlig und gerade), wenn $\varphi(\mathfrak{Z})$ eine in P regulär analytische und in F beschränkte Funktion ist, welche für sämtliche Substitutionen $\subset\Gamma$ die Funktionalgleichung $\varphi((\mathfrak{A}\mathfrak{Z}+\mathfrak{B})(\mathfrak{C}\mathfrak{Z}+\mathfrak{D})^{-1})=|\mathfrak{C}\mathfrak{Z}+\mathfrak{D}|^g\varphi(\mathfrak{Z})$ befriedigt. Es gibt eine eindeutig bestimmte Fourierentwicklung $\varphi(\mathfrak{Z})=\sum\limits_{\mathfrak{T}}a(\mathfrak{T})e^{2\pi i\sigma(\mathfrak{T}\mathfrak{Z})}$ ($\sigma=$ Spurzeichen), in welcher die Summation über alle symmetrischen halbganzen $\mathfrak{T}$ zu erstrecken ist; $a(\mathfrak{T})=a(\mathfrak{T}[\mathfrak{U}])$ ist stets erfüllt. Setzt man $\begin{pmatrix}\mathfrak{Z}_1&\mathfrak{n}\\ \mathfrak{n}'&i\lambda\end{pmatrix}$ ($\lambda>0$, $\mathfrak{n}=$ Nullspalte), so gilt der für Induktionsansätze wichtige Satz, daß $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\varphi(\mathfrak{Z})=\psi(\mathfrak{Z}_1)$ existiert und eine Modulform $(n-1)$-ten Grades zum gleichen Gewicht darstellt. Eine Form $\varphi(\mathfrak{Z})$ mit $g<0$ verschwindet identisch und ist mit $g=0$ notwendig konstant. – Das erste Hauptergebnis besagt: Zwischen $h=\dfrac{n(n+1)}{2}+2$ beliebigen Modulformen $\varphi_1,\dots\varphi_h$ mit den Gewichten $g_1,\dots,g_h$ gibt es stets eine isobare Gleichung $\sum\limits_{g_1\nu_1+\dots+g_h\nu_h=g,\nu_i\geqq0}a(\nu_1,\dots,\nu_h)\varphi_1^{\nu_1}\cdots\varphi_h^{\nu_h}=0$ vom Gewicht $g=c_1g_1\cdots g_h$, $c_1=c_1(n)$, mit nicht sämtlich verschwindenden konstanten Koeffizienten. Der Beweis erfolgt durch Zurückführung auf den nachfolgenden Satz, in welchem $D(\mathfrak{T})>0$ der größte gemeinsame Teiler aller r-reihigen Unterdeterminanten der Matrix $\mathfrak{T}$ vom Rang r ist. Eine Modulform $\varphi(\mathfrak{Z})=\sum\limits_{\mathfrak{T}}a(\mathfrak{T})e^{2\pi i\sigma(\mathfrak{T}\mathfrak{Z})}$ verschwindet identisch, wenn $T>c_2g^n$, $c_2=c_2(n)$, und $a(\mathfrak{T})=0$ für alle $\mathfrak{T}$ mit $D(\mathfrak{T})\leqq T$ gilt. Ein Induktionsansatz nach n und eine gewisse Verallgemeinerung des Schwarzschen Lemmas führen zum Beweis dieses wichtigen Satzes. Um die Existenz von $h-1$ algebraisch unabhängigen Modulformen zu erhärten, werden spezielle Formen vom Gewicht $g>n+1$, nämlich die Eisensteinreihen $\Psi_g(\mathfrak{Z})=\sum\limits_{\{\mathfrak{C},\mathfrak{D}\}}|\mathfrak{C}\mathfrak{Z}+\mathfrak{D}|^{-g}$ herangezogen. Die Summe ist dabei über ein volles System von ganzzahligen teilerfremden symmetrischen und paarweise nicht assoziierten Matrizenpaaren $\mathfrak{C},\mathfrak{D}$ zu erstrecken. Für natürliches gerades $g>n+1$ ist $\Psi_g(\mathfrak{Z})\neq0$. Mit nicht identisch verschwindender Modulform $\Phi_g(\mathfrak{Z})$ vom Gewicht g wird die in λ meromorphe Funktion $M(\lambda;\mathfrak{Z})=\sum\limits_{\{\mathfrak{C},\mathfrak{D}\}}(\lambda-\Phi_g(\mathfrak{Z})|\mathfrak{C}\mathfrak{Z}+\mathfrak{D}|^g)^{-1}$ gebildet und unter voller Ausnutzung der Ganzzahligkeit der Modulsubstitutionen gezeigt, daß $M(\lambda;\mathfrak{Z}_1)\equiv M(\lambda;\mathfrak{Z}_2)$ nur dann stattfinden kann, wenn $\mathfrak{Z}_1$ und $\mathfrak{Z}_2$ nach Γ äquivalent sind, sofern $\mathfrak{Z}_1,\mathfrak{Z}_2$ nicht auf gewissen algebraischen Flächen liegen. Unter den Koeffizienten $f_k(\mathfrak{Z})=\Psi_{kg}(\mathfrak{Z})\Phi_g^{-k}(\mathfrak{Z})$ der Potenzreihe $-M(\lambda;\mathfrak{Z})=\sum\limits_{k=1}^{\infty}f_k(\mathfrak{Z})\lambda^{k-1}$ muß es dann notwendig $h-2$ algebraisch unabhängige geben, etwa $f_{k_a}(\mathfrak{Z})$ $(a=1,\dots,h-2)$. Damit ergibt sich das zweite

Hauptresultat, nämlich die Existenz von $h-1$ isobar algebraisch unabhängigen Formen $\Psi_g(\mathfrak{Z})$, $\Psi_{k_a g}(\mathfrak{Z})$ $(a=1,\dots,h-2)$. Definiert man eine Modulfunktion n-ten Grades als Quotienten zweier Modulformen gleichen Gewichts, so besagen die abgeleiteten Ergebnisse, daß der Körper aller Modulfunktionen über dem Körper der komplexen Zahlen den Transzendenzgrad $h-2$ hat. Eine genauere Analyse der algebraischen Relationen zwischen je $h-1$ Modulfunktionen zeigt, daß sich alle Modulfunktionen rational durch $h-1$ geeignete ausdrücken lassen. Jede Modulfunktion läßt sich sogar rational durch Eisensteinreihen, nämlich als Quotient von zwei isobaren Polynomen gleichen Gewichts darstellen. Die Modulfunktionen sind nach Definition an jeder Stelle des Fundamentalbereichs (als Quotienten von Formen) meromorph. Daß diese Eigenschaft zusammen mit der Invarianz bei Γ zur Charakterisierung der Modulfunktionen ausreicht, wird ohne Beweis mitgeteilt. Zum Schluß wird der Nachweis erbracht, daß die Koeffizienten in der Fourierentwicklung von $\Psi_g(\mathfrak{Z})$ rational sind, und die Methode entwickelt, wie die algebraischen Relationen zwischen den Eisensteinreihen aufgestellt werden können.

Reviewer: Maaß, H., Dr. (Heidelberg)

Full Text: DOI EuDML

References:

[1] Vgl. hierzu die ausführliche geschichtliche Übersicht im Enzyklopädie-Referat II, B 7 von A. Krazer und W. Wirtinger über Abelsche Funktionen und allgemeine Thetafunktionen.

[2] E. Picard, Sur une classe de groupes discontinus de substitutions linéaires et sur les fonctions de deux variables indépendantes restant invariables par ces substitutions, Acta mathematica1 (1882), S. 297–320.· doi:10.1007/BF02592137

[3] O. Blumenthal, Über Modulfunktionen von mehreren Veränderlichen, Math. Annalen56 (1903), S. 509–548 und58 (1904), S. 497–527; Über Thetafunktionen und Modulfunktionen mehrerer Veränderlicher, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung13 (1904), S. 120–132. · Zbl 34.0466.01 · doi:10.1007/BF01444306

[4] E. Hecke, Höhere Modulfunktionen und ihre Anwendung auf die Zahlentheorie, Math. Annalen71 (1912), S. 1–37; Über die Konstruktion relativ-Abelscher Zahlkörper durch Modulfunktionen von zwei Variabeln, ebenda74 (1913), S. 465–510; Analytische Funktionen und algebraische Zahlen II. Teil, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität3 (1924), S. 213–236. · Zbl 42.0457.01 · doi:10.1007/BF01456926

[5] C. L. Siegel, Lectures on the analytical theory of quadratic forms, autographiert, Princeton (1935); Über die analytische Theorie der quadratischen Formen, Annals of mathematics36 (1935), S. 527–606; Formes quadratiques et modules des courbes algébriques, Bulletin des sciences mathématiques, 2. Reihe,61 (1937), S. 331–352.

[6] H. Braun, Zur Theorie der Modulformenn-ten Grades, Math. Annalen115 (1938), S. 507–517; Konvergenz verallgemeinerter Eisensteinscher Reihen, Math. Zeitschr.44 (1939), S. 387–397. · Zbl 0018.40002 · doi:10.1007/BF01448955

[7] H. Minkowski, Diskontinuitätsbereich für arithmetische Äquivalenz, Gesammelte Abhandlungen, Bd.2, S. 53–100. Leipzig und Berlin 1911.