Beurling, A.
Sur les intégrales de Fourier absolument convergentes et leur application à une transformation fonctionnelle. (French) JFM 65.0483.02
9^{me} Congr. Math. Scand. 1938, 345-366 (1938).

(V) sei die Klasse der Funktionen $F(x)$ mit endlicher totaler Variation in $(-\infty,\infty)$

$$V(F)=\int_{-\infty}^{\infty}|dF(x)|,$$

die außerdem normiert sein sollen: $F(-\infty)=0$, $F(x)=\frac{1}{2}(F(x+0)+F(x-0))$. Die Integralgleichung vom "Faltungstyp".

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(x-y)\,dF(y)=\Psi(X), \tag{1}$$

die man bei gegebenem F als eine Funktionaltransformation auffassen kann, die Φ in Ψ überführt, wird, wenn es sich um Funktionen aus (V) handelt, durch die Fourier-Transformation (absolut konvergentes Fourier-Integral)

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}\,dF(x) \tag{2}$$

in die algebraische Gleichung $\varphi(t)f(t)=\psi(t)$ übergeführt. Die Lösung $\varphi(t)=\dfrac{1}{f(t)}\psi(t)$ ergibt durch Zurückübersetzung die Umkehrung der Transformation (1), falls $\dfrac{1}{f(t)}$ auch wieder ein absolut konvergentes Fourier-Integral ist. Mit dieser Frage und der Verallgemeinerung, wann $\varphi(f)$, wo φ eine analytische Funktion darstellt, wieder ein absolut konvergentes Fourier-Integral ist, sowie mit Erweiterungen auf allgemeinere Klassen von Funktionen befaßt sich die Arbeit.

Jede Funktion F von (V) läßt sich in bekannter Weise in eine absolut stetige Funktion F_1, eine stetige Funktion F_2 mit fast überall verschwindender Ableitung und eine Treppenfunktion F_3 zerlegen: $(V)=(V_1)+(V_2)+(V_3)$. Dieser Zerlegung von (V) entspricht eine Zerlegung der durch (2) zugeordneten Klasse (T) von Funktionen f: $(T)=(T_1)+(T_2)+(T_3)$. Die drei entsprechenden Teile f_1, f_2, f_3 von f heißen der gewöhnliche, der singuläre und der fastperiodische Teil von f.

Die Klasse (V) wird nun zunächst durch Einführung von Gewichtsfunktionen $p(x)$ verallgemeinert, die die Bedingungen erfüllen sollen:

$$p(x)\geqq p(0)=1,\quad p(x+y)\leqq p(x)p(y),\quad p(\varrho x)\geqq p(x)\quad(\varrho>1).$$

(V_p) sei die Klasse der Funktionen F, für die

$$V_p(F)\equiv\int_{-\infty}^{\infty}p(x)\,|dF(x)|$$

endlich ist, und (T_p) die vermöge (2) zugeordnete Klasse von Funktionen f. Auch hier kann man wieder die drei obigen Teile f_1, f_2, f_3 unterscheiden. – Das Integral (2) konvergiert absolut in einem gewissen Streifen $D_p:-\alpha\leqq \operatorname{Im}t\leqq\beta$, der zu einer Geraden einschrumpfen kann.

Die oben erwähnte Frage wird nun durch folgenden Satz (Théorème III A) beantwortet:

Es sei f eine Funktion aus einer Klasse (T_p) ohne singulären Teil und $\varphi(z)$ eine eindeutige analytische Funktion, deren Existenzbereich die abgeschlossene Hülle der von f in D_p angenommenen Werte enthält. Dann gehört auch $g(t)=\varphi(f(t))$ zu (T_p) und hat keinen singulären Teil.

Hieraus ergibt sich nun hinsichtlich der Transformation (1) der Satz (Théorème VA):

F sei eine Funktion aus (V_p) ohne singulären Teil. Ist die untere Grenze von $|f|$ auf D_p positiv (> 0), so gibt es eine Funktion G vom gleichen Charakter wie F, vermittels deren sich (1) so umkehren läßt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x-y)\, dG(y) = \Phi(x).$$

Diese Sätze werden weitgehend verallgemeinert und in Beziehung zu dem Tauberschen Satz (*N. Wiener*, Ann. Math., Princeton, (2) 33 (1932); 1-100, 787; JFM 58.0226.*, 229) gebracht, der unter gewissen Voraussetzungen von

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x-y)K(y)\, dy \to 0 \quad \text{für} \quad x \to \infty$$

auf $\Phi(x) \to 0$ für $x \to \infty$ schließt.

Reviewer: Doetsch, G., Prof. (Freiburg im Breisgau)