Wiener, N.
The ergodic theorem. (English) JFM 65.0516.04
Duke math. J. 5, 1-18 (1939).

Es sei T^λ eine (in gewissem Sinne meßbare) Schar von maßtreuen Abbildungen einer meßbaren Menge S in sich; $T^\lambda T^\mu = T^{\lambda+\mu}$. Ist $f(P)$ eine auf S definierte Funktion von der Lebesgueschen Klasse L^2, so existiert nach dem von Neumannschen Ergodensatze eine Funktion $f_1(P) \in L^2$ derart, daß

$$\int\limits_S \left| f_1(P) - \frac{1}{N}\int\limits_0^N f(T^\lambda P)\, d\lambda \right|^2 dm \to 0 \quad \text{für} \quad N \to \infty.$$

Verf. gibt für diesen Satz einen neuen Beweis. Dann stellt er den folgenden neuen Satz auf: Es sei $f(P) \in L$, $f(P) \geqq 0$, und es sei $f^*(P) = \underset{0<A<\infty}{\text{obere Grenze}} \frac{1}{A}\int\limits_0^A f(T^\lambda P)\, d\lambda$. Es sei α eine positive Zahl, und man setze E_α bzw. E_α^* für die Menge, für die $f(P)$ bzw. $f^*(P) \geqq \alpha$ ist. Dann gilt:

$$\text{Maß } E_\alpha^* \leqq \frac{1}{\alpha}\int\limits_S f(P)\, dm \quad \text{und} \quad \text{Maß } E_\alpha^* \leqq \frac{2}{\alpha}\int\limits_{E_{\frac{\alpha}{2}}} f(P)\, dm.$$

Wenn $f(P) \in L^p$ $(p > 1)$, dann auch $f^*(P) \in L^p$; wenn $\int\limits_S f(P) \log^+ f(P)\, dm < \infty$, dann $f^*(P) \in L$. Es wird weiter gezeigt, wie aus diesem Satze (mit Hilfe des von Neumannschen Ergodensatzes) der Birkhoffsche Ergodensatz: "zu $f(P) \in L$ gibt es ein $f_1(P) \in L$ so, daß

$$f_1(P) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\int\limits_0^N f(T^\lambda P)\, d\lambda$$

für alle P außer einer Nullmenge gilt" und der folgende Satz "ist $f(P) \in L$, so gilt die Gleichung

$$f(P) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^\varepsilon f(T^\lambda P)\, d\lambda$$

für alle P außer einer Nullmenge" folgen. Alle diese Sätze und ihre Beweise lassen sich auch auf den Fall übertragen, daß T^λ durch eine n-parametrige Schar $T_1^{\lambda_1} T_2^{\lambda_2} \cdots T_n^{\lambda_n}$ von maßtreuen Abbildungen von S in sich ersetzt wird. So wird unter anderem die folgende, zuerst von Dunford erhaltene Verallgemeinerung des von Neumannschen Ergodensatzes neu bewiesen: Ist $f(P) \in L^2$, so gibt es ein $f_1(P) \in L^2$ derart, daß

$$\int\limits_S \left| f_1(p) - \frac{1}{\Lambda^n K_n} \int\cdots\int\limits_{\sum \lambda_k^2 \leqq \Lambda} f(T_1^{\lambda_1} \cdots T_n^{\lambda_n} P)\, d\lambda_1 \cdots d\lambda_n \right|^2 dm \to 0$$

für $\Lambda \to \infty$ (K_n bezeichnet das Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel) (vgl. *N. Dunford*, Duke math. J. 5 (1939), 635-646).

Reviewer: Von Sz. Nagy, B., Prof. (Szeged)

Full Text: DOI