zbMATH Open
THE FIRST RESOURCE FOR MATHEMATICS

Giraud, G.

Sur une classe d'équations linéaires où figurent des valeurs principales d'intégrales simples.
(French) JFM 65.1299.03
Ann. sci. École norm. sup. (3) 56, 119-172 (1939).

Verf., der sich schon mehrmals mit Integralgleichungen beschäftigt hat, die den Cauchyschen Hauptwert eines *mehrfachen* Integrals enthalten (s. insbesondere: Ann. sci. École norm. sup. (3) 51 (1934), 251-372; 53 (1936), 1-40; 54 (1937), 293-294; JFM 60.1064.*; 62_{I}, 496; 63_{I}, 401), kommt jetzt auf diese Fragen zurück, um zu untersuchen, ob manche Eigentümlichkeiten der betreffenden Theorie auch in dem relativ elementaren Falle einer Gleichung mit dem Hauptwert eines einfachen Integrals noch vorhanden sind.

Es handelt sich aber nicht um Integralgleichungen der Gestalt

$$g(x)u(x) - \lambda \int_a^b \left[\frac{1}{x-y} + K(x,y)\right] u(y)\,dy = f(x) \tag{1}$$

(K regulär) wie jene, die *T. Carleman* in einer (vom Verf. übrigens nicht erwähnten) meisterhaften Arbeit (Ark. Mat. Astron. Fysik 16 (1922), Nr. 26, 19 S.; F. d. M. 48, 456 (JFM 48.0456.*)) behandelt hat, sondern um Integralgleichungen wie folgende:

$$g(x)u(x) - \lambda \int_0^{2\pi} \operatorname{cotg} \frac{x-y}{2} u(y)\,dy = f(x), \tag{2}$$

wo (im Gegensatz zu der vorhergehenden) der Hauptwert des Integrals auch dann beschränkt bleibt, wenn x einer der beiden Integrationsgrenzen zustrebt. Freilich setzt Verf. – der Allgemeinheit halber – keineswegs voraus, daß der Integrationsweg geradlinig sein muß, sondern betrachtet Gleichungen der Gestalt

$$g(X)u(X) - \lambda \int_V G(X,A)u(A)\,d\sigma_A = f(X), \tag{3}$$

wo die Integrationsmannigfaltigkeit V aus einer Kurve oder mehreren geschlossenen Kurven Γ, Γ', ...bestehen darf. Das Wesentliche dabei ist nur, daß, falls beide Punkte X und A auf der gleichen Teilkurve Γ einander unendlich näher rücken, der Hauptteil des Kernes $G(X,A)$ von der Form $\dfrac{\pi}{\omega}c(x)\operatorname{cotg}\dfrac{\pi(x-a)}{\omega}$ ist, wo x und a die krummlinigen Koordinaten von X bzw. A, ω die der Kurve Γ entsprechende Periode und $c(x)$ eine die Lipschitzsche Bedingung befriedigende Funktion bezeichnen.

Das Haupthilfsmittel für die Behandlung der Integralgleichung (3) ist wie üblich die *Komposition* mit einem ähnlichen singulären Kern, womit die Singularität bei $x = a$ abgeschwächt wird, und wodurch man auf eine Fredholmsche Gleichung zweiter Art zurückgeführt wird. Dafür ist aber nötig, daß gewisse rein imaginäre Werte λ_C von λ (die zusammen eine gewisse "Ausnahmemenge" C auf der imaginären Achse der λ-Ebene bilden) von vornherein ausgeschlossen werden.

Auf dem angedeuteten Weg gelangt man unter anderem auf folgenden Hauptsatz betreffs der (3) entsprechenden homogenen Integralgleichung

$$g(X)u(X) - \lambda \int_V G(A,X)u(A)\,d\sigma_A = 0: \tag{4}$$

"Zu jedem von Ausnahmewerten λ_c freien Gebiet D der λ-Ebene gibt es zwei ganze Zahlen r und s (beide $\geqq 0$) mit der Eigenschaft, daß für jeden *gewöhnlichen* D-Wert λ_0 von λ die Gleichung (4) r

Edited by FIZ Karlsruhe, the European Mathematical Society and the Heidelberg Academy of Sciences and Humanities
© 2021 FIZ Karlsruhe GmbH

linear-unabhängige Lösungen u_1, u_2, ..., u_r hat, während die transponierte Gleichung

$$g(X)u(X) - \lambda \int_V G(A,X)u(A)\, d\sigma_A = 0 \tag{5}$$

deren s besitzt. Ist dagegen λ_0 kein *gewöhnlicher* D-Wert, sondern ein Pol des lösenden Kernes von (3), dann werden die obigen Zahlen r und s durch $r+t$ bzw. $s+t$ ersetzt, wo t eine positive oder verschwindende ganze Zahl bedeutet." In jedem Fall ist der Unterschied d zwischen den Anzahlen der Grundlösungen von (4) und (5) eine nur von dem Gebiet D abhängige Konstante. Durch ein einfaches Beispiel (Gleichung für die Bestimmung einer harmonischen Funktion $u(x,y)$, deren Ableitung u'_x vorgeschriebene Randwerte auf einem Kreise annimmt) zeigt Verf., daß der Fall $d \neq 0$ wirklich vorkommen kann.

Die Arbeit enthält ferner einige kurze Angaben über die Ausdehnung der Theorie auf Systeme von mehreren Gleichungen des Typus (3).

Reviewer: Tricomi, F., Prof. (Turin)

Cited in **4** Documents

Full Text: DOI Numdam EuDML

© 2021 FIZ Karlsruhe GmbH