Krull, W.
Dimensionstheorie in Stellenringen. (German) JFM 64.0078.02
J. reine angew. Math. 179, 204-226 (1938).

Ein Stellenring ist ein kommutativer Ring $\mathfrak{R}$ mit Einselement, der der Maximalbedingung genügt und in dem die Menge aller Nichteinheiten ein Ideal $\mathfrak{m}$ bildet. $\mathfrak{R}/\mathfrak{m}$ ist dann ein Körper K, und der Durchschnitt aller Potenzen $\mathfrak{m}^\varrho$ ist (0). Ist daher $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ eine Basis mit möglichst wenig Elementen von $\mathfrak{m}$, so gibt es für jedes $0\neq a\in\mathfrak{R}$ für mindestens ein ϱ eine Form $\varphi_\varrho(x_1,\dots,x_n)\in\mathfrak{R}[x_1,\dots,x_n]$ vom Grade ϱ, so daß $a\equiv\varphi_\varrho(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \pmod{\mathfrak{m}^{\varrho+1}}$ wird, und $\varphi_\varrho\notin\mathfrak{m}\mathfrak{R}[x_1,\dots,x_n]$. Auf diese Weise läßt sich jedes Element formal in eine Potenzreihe entwickeln, $a=\varphi_\varrho+\varphi_{\varrho+1}+\cdots$, und a ist durch jede solche Entwicklung eindeutig bestimmt. Hat jedes Element auch nur eine Entwicklung, so heißt $\mathfrak{R}$ ein p-Reihenring. $\mathfrak{R}$ ist dann ein ganz abgeschlossener Integritätsbereich. -Statt der Reihenentwicklungen benutzt Verf. die Anfangsformen: $\overline{\varphi}_\varrho\in K[x_1,\dots,x_n]$ heißt eine Anfangsform zu a, falls $a=\varphi_\varrho+\cdots$ und φ_ϱ beim Homomorphismus $\mathfrak{R}[x_1,\dots,x_n]/\mathfrak{m}\mathfrak{R}[x_1,\dots,x_n]$ auf $\overline{\varphi}_\varrho$ abgebildet wird. Ist $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{b}$ ein Ideal von $\mathfrak{R}$, so bilden die Anfangsformen zu den Elementen von $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{b}$ ein Ideal $\overline{\mathfrak{a}}$ bzw. $\overline{\mathfrak{b}}$ von $K[x_1,\dots,x_n]$. Es gilt neben selbstverständlichen Formeln: aus $\mathfrak{a}\subseteqq\mathfrak{b}$ und $\overline{\mathfrak{a}}=\overline{\mathfrak{b}}$ folgt $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}$.

Die Dimensionstheorie der Ideale von $K[x_1,\dots,x_n]$ überträgt sich auf $\mathfrak{R}$, denn es gilt $\dim\mathfrak{a}=\dim\overline{\mathfrak{a}}$. Für p-Reihenringe gilt insbesondere, daß für jedes Primideal die Summe von Dimension und Dimensionsdefekt stets n ist. Die Beweise sind z. T. recht schwierig. Der Zusammenhang der Stellenringe mit den Potenzreihenringen in mehreren Variablen, der den Zusammenhang der Bewertungsringe mit den Potenzreihenringen in einer Variablen verallgemeinert, legt es nahe, jeden Stellenring $\mathfrak{R}$ in einen "perfekten" Stellenring $\mathfrak{R}^*$ einzubetten. Dabei heißt ein Stellenring $\mathfrak{R}^*$ perfekt, wenn jedes Kongruenzensystem $a\equiv a_\varrho \pmod{\mathfrak{m}^{\varrho+1}}$ $(\varrho=0,1,\dots)$ lösbar ist, falls $a_\varrho\equiv a_{\varrho+1} \pmod{\mathfrak{m}^{\varrho+1}}$ $(\varrho=0,1,\dots)$ erfüllt ist. Verf. vermutet, daß sich die Ergebnisse der Strukturtheorie perfekter und diskret bewerteter Körper (vgl. *H. Hasse, F. K. Schmidt*, J. reine angew. Math. 170 (1933), 4-63; F. d. M. 59_{I}, 154) ohne Schwierigkeiten auf perfekte p-Reihenringe übertragen lassen und daß jeder perfekte Stellenring homomorphes Bild eines perfekten p-Reihenringes ist. – Die Wichtigkeit dieser Untersuchungen wird nicht nur durch die körpertheoretische Bedeutung der p-Reihenringe gezeigt, sondern die Methode der Anfangsformen läßt sich auch dazu benutzen, die Theorie der Potenzreihenringe mit Koeffizienten aus einem beliebigen Ringe mit Maximalbedingung unter gewissen Voraussetzungen auf die Polynomringtheorie zurückzuführen. Verf. gibt speziell eine Anwendung auf das Teilbarkeitsproblem (vgl. die vorstehend besprochene Arbeit).

Reviewer: Lorenzen, P., Dr. (Bonn)

Full Text: DOI Crelle EuDML