Chabauty, C.

Sur les équations diophantiennes liées aux unités d'un corps de nombres algébriques fini.

(French) JFM 64.0142.01
Ann. Mat. pura appl., Bologna, (4) 17, 127-168 (1938).

Verf. studiert die ganzzahligen Lösungen des Gleichungssystems

$$\operatorname{Norm}(\mathfrak{X}_1\omega_1+\cdots+\mathfrak{X}_n\omega_n)=\pm 1,$$
$$F_j(\mathfrak{X}_1,\ldots,\mathfrak{X}_n)=0\quad(j=1,2,\ldots,h),$$

wo ω_1, ..., ω_n eine Basis der ganzen Zahlen eines algebraischen Körpers K darstellen. Er beweist aufs neue und verallgemeinert frühere Resultate von *Thue* und Ref., welche die Fälle $h=n-2$, $r\leqq n-2$, die F_j linear homogen (r ist die Zahl der Grundeinheiten nach *Dirichlet*) und $n=5$, $h=2$, $r=2$ betreffen. Sein wichtigstes Ergebnis ist: Indem die Zahlen des Körpers K als Punkte in einem n-dimensionalen Raume aufgefaßt werden, gilt: Enthält eine algebraische Mannigfaltigkeit der Dimension $s\leqq n-r-1$ eine unendliche Menge E von Einheiten aus K, so gibt es mindestens eine Untergruppe γ der Einheitsgruppe Γ, so daß gilt: (1) Mindestens eine der Nebengruppen zu γ enthält eine unendliche Untermenge von E. (2) Zwischen $\sigma=r+s-1$ beliebigen der Konjugierten jeder Einheit ε aus γ, etwa $\varepsilon^{(q_1)}$, ..., $\varepsilon^{(q_\sigma)}$, gilt eine Relation

$$\varepsilon^{(q_1)^{m_1}}\cdot\ldots\cdot\varepsilon^{(q_\sigma)^{m_\sigma}}=1$$

mit ganzen m_1, ..., m_σ, die nicht alle null und unabhängig von ε sind.

Hieraus folgt für eine große Klasse algebraischer Körper, wozu z. B. die vom Primzahlgrad und die, deren Gruppe die symmetrische ist, gehören: Eine algebraische Mannigfaltigkeit der Dimension $s\leqq n-r-1$ enthält nur endlich viele Einheiten. Besitzt K mindestens zwei Paare konjugiert imaginärer Körper, so gibt es dann und nur dann unendlich viele Einheiten in einem dreidimensionalen Modul M in K, wenn M zwei Zahlen φ und ψ enthält, φ Einheit, derart daß $\vartheta=\dfrac{\psi}{\varphi}$ reell quadratisch ist. Ist ε Grundeinheit in $R(\vartheta)$, so stellt $\varphi\varepsilon^n$ (n ganz rational) alle Einheiten aus M, möglicherweise mit endlich vielen Ausnahmen, dar.

Als Hilfsmittel gibt Verf. im ersten Kapitel die wichtigsten Tatsachen über p-adische Potenzreihen und im zweiten Kapitel einige Sätze über Mengen von Punkten, die eine Abelsche Gruppe bilden in bezug auf die Operation, die in der Multiplikation der Koordinaten desselben Index besteht. Im dritten Kapitel folgen die Anwendungen auf diophantische Gleichungen.

Reviewer: Skolem, T., Prof. (V. Aker bei Oslo)

Full Text: DOI EuDML

References:

[1] A. Thue, " Journ. für Math. {", Bd. 135 (1909).}

[2] C. Siegel, " Math. Zeit. {", Bd. 10 (1921).}

[3] T. Skolem, " Math. Annal {", Bd. 111 (1936).}

[4] " C. R. {", t. 202, p. 2117, Juin 1936; t. 204, p. 942, Mars 1937; t. 205, p. 943, November 1937.}

[5] Pour leurr démonstration, Cf.Chevalley, " Thèse {", Paris, 1933,Sur la théorie du corps de classe, chap. V, p. 407–423, et " Jouru. of the faculty of sciences {", Tokyo, 1933.}}

[6] Cf. Van derWaerden,Moderne Algebra, Bd. 1, {\S} 60.

[7] Le théorème (1.3) est valable plus généralement pour toute série d' éléments d'un espace vectoriel normé quelconque lorsque la série estcommutativement convergente e. a. d. qu'elle reste convergente après un changement quelconque de l'ordre de ses ter-

mes (cf.Banach,Opérations linéaires, p. 240). Les sériesp-adiques sont un exemple de séries qui peuvent être commutativement convergentes sans être absolument convergentes.

[8] W. Buckert, “ Math. Annal. {”, Bd. 107 (1932), p. 259–281.}

[9] Voir pour une démonstration directe Th.Skolem, “ Math. Ann. {”, 111, 1936, p. 399. Mais le lemme deWeierstrass ne nous suffirait pas pour obtenir la représentation paramétrique dont nous avons besoin pour des variétés algébroïdes.}

[10] Une variété algébriqueW est dite irréductible quand son idéal propre (W) dans l'anneau des polynômes enx 1,...,x n, est premier. C'est une irréductibilité globale, différente de l'irréductibilité locale définie au chapitre I pour toute variété algébroïde. La dimensions deW, définie algébriquement à partir de cet idéal de polynômes, coïncide en tout point avec la dimension définie localement comme au chap. I. On démontre qu'il existe une représentation, comme fonctions algébriques des parametres, des coordonnées de tous les points deW étrangers à une vraie sous-variété de W ou comme on dit du point général deW. (Cf. Van derWaerden,Moderne Algebra. tome II, chap. 13).

[11] Speiser,Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, p. 64. · Zbl 63.0059.01

[12] C.-L. Siegel, “ Abh. Preuss. Akad. Wiss. {”, n. 1, 1929, p. 45.} · Zbl 55.0446.02