Pettis, B. J.

Linear functionals and completely additive set functions. (English) JFM 64.0370.02

Duke math. J. 4, 552-565 (1938).

Verf. betrachtet beschränkt additive (b. a.) und vollständig additive (c. a.) Mengenfunktionen in einem abstrakten Raume T, die zunächst als reellwertig vorausgesetzt werden. Hat die (c. a.) Funktion $\mu(F)$ den Definitionsbereich $\mathcal{F} = [F]$, so läßt sich jede (b. a.) Funktion $\alpha(F')$, deren Definitionsbereich $\mathcal{F}'$ in $\mathcal{F}$ enthalten ist, in ganz $\mathcal{F}$ norminvariant fortsetzen derart, daß mit $\mu(F) = 0$ auch $\alpha(F) = 0$ ist, wenn dies in $\mathcal{F}'$ galt. Der Raum der (c. a.) Funktionen ist abgeschlossen, linear und nirgends dicht im Raume der (b. a.) Funktionen. Dies gilt auch noch innerhalb gewisser Teilräume. Für den Beweis der weiteren Sätze wird folgende Voraussetzung (M) eingeführt: Jede reellwertige (c. a.) Funktion, die auf allen Teilmengen von T definiert werden kann und speziell für jeden einzelnen Punkt den Wert Null hat, verschwindet identisch. Die Menge S_α der Punkte t von T, die "Spektralpunkte", für welche eine (b. a.) Funktion ungleich Null ist, ist abzählbar. $\sigma_\alpha(F) = a(F \cdot S_\alpha)$ heißt Spektralfunktion von α. Es wird gezeigt: Gleichwertig mit (M) ist folgende Bedingung: C^T sei der Raum aller (c. a.) Funktionen, deren Definitionsbereich alle Teilmengen von T umfaßt $(\mathcal{F}^T)$. Dann ist ein Funktional $f(\gamma)$ über C^T dann und nur dann linear, wenn es in der Form

$$f(\gamma) = \int\limits_T b_f(t) d\gamma$$

darstellbar ist, wo b_f eine reelle Funktion über T ist. Schwache Konvergenz in C^T zieht starke nach sich. Ist $\mathcal{F}$ der vollständige Definitionsbereich einer positiven (c. a.) Funktion $\mu(F)$, die für einzelne Punkte verschwindet, dann ist jede (c. a.) Funktion über $\mathcal{F}$ eindeutig darstellbar in der Form

$$\gamma(F) = \beta_\gamma(F) + \int\limits_F \mathfrak{c}_\gamma(t) d\mu.$$

Jetzt werde vorausgesetzt, daß die Werte der Mengenfunktion einem Banachschen Raume X entnommen werden. Die Norm wird in folgender Weise definiert: $\overline{X} = [f]$ sei der Raum der linearen Funktionale über X. $x(F)$ sei additiv, dann ist $f(x(F))$ reell additiv; $\|f(x(\cdot))\|$ sei die Norm dieser Funktion von F im früheren Sinne (totale Variation). Durchläuft f nun alle Funktionale aus $\overline{X}$ mit der (Funktional-)Norm $\|f\|$, so ist deren obere Grenze die Norm von $x(F)$. Man kann wieder (b. a.) Funktionen definieren. Die (c. a.) Funktionen sind wieder von selbst beschränkt. Es lassen sich fast alle früheren Resultate übertragen. Jedoch braucht eine (b. a.) Funktion jetzt keine Spektralfunktion mehr zu besitzen. Aus der Gültigkeit von (M) im früheren Sinne folgt Entsprechendes bei der neuen Definition. Der Darstellungssatz wird insofern modifiziert, als man nur schreiben kann

$$x(F) = x_S(F) + y(F),$$

wo x eine (c. a.) Funktion, x_S Spektralfunktion von x und y absolut stetig in Bezug auf μ ist. Der Mengenraum $\mathcal{F}$ wird als separabel bezüglich der durch μ definierten Metrik $(\operatorname{dist}(F, G) = \mu(F - G) + \mu(G - F))$ angenommen.

Reviewer: Tautz, G., Dr. (Breslau)

Full Text: DOI