Siegel, C. L.

Über die Zetafunktionen indefiniter quadratischer Formen. II. (German) JFM 64.0976.03

Math. Z. 44, 398-426 (1938).

Mit großen deutschen Buchstaben werden Matrizen bezeichnet. $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^{(a,b)}$ ist eine Matrix mit a Zeilen und b Spalten, $\mathfrak{M}^{(a,a)} = \mathfrak{M}^{(a)}$. Der Betrag der Determinante $|\mathfrak{M}|$ einer quadratischen Matrix $\mathfrak{M}$ wird gelegentlich durch den zugehörigen großen lateinischen Buchstaben M angegeben. Kleine deutsche Buchstaben bedeuten Matrizen mit nur einer Spalte. Die Transposition einer Matrix wird durch einen Akzent ausgedrückt. Eine symmetrische reelle Matrix heißt positiv, wenn die zugehörige quadratische Form positiv-definit ist.

Es sei $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}' = \mathfrak{S}^{(m)}$ rational und die quadratische Form $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x}$ von der Signatur $(n, m-n)$, d. h. reell in

$$y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 - (y_{n+1}^2 + \cdots + y_m^2) \qquad (0 < n < m)$$

transformierbar. Ziel der Abhandlung ist die Definition der zu $\mathfrak{S}$ gehörigen Zetafunktion $\zeta(\mathfrak{S}, s)$, ihre Darstellung durch die invariante Thetareihe, ihre analytische Fortsetzung in die ganze Ebene und der Beweis einer Riemannschen Funktionalgleichung.

Zur Erklärung der Thetareihe bestimme man $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}^{(m,n)}$ so, daß $\mathfrak{T} = \mathfrak{X}'\mathfrak{S}\mathfrak{X}$ positiv ausfällt und setze mit $0 < \lambda < 1$.

$$\mathfrak{H} = \lambda\mathfrak{S} - \mathfrak{S}\mathfrak{X}\mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{X}'\mathfrak{S}. \tag{1}$$

Dann ist $-\mathfrak{H}$ positiv. Die mit $\gamma = \{\lambda(1-\lambda)\}^{-\frac{1}{2}}$ gebildete Reihe

$$\vartheta(u, \lambda, \mathfrak{X}, \mathfrak{S}) = \sum_{\mathfrak{c}} e^{\pi\gamma u \mathfrak{c}'\mathfrak{H}\mathfrak{c}}, \tag{2}$$

in der $\mathfrak{c}^{(m,1)}$ alle ganzen Spalten durchläuft, geht bei $\mathfrak{X} \to \mathfrak{U}\mathfrak{X}$ ($\mathfrak{U}$ eine Einheit von $\mathfrak{S}$) in sich über. Die Transformationsformel lautet

$$\vartheta(u, \lambda, \mathfrak{X}, \mathfrak{S}) = S^{-\frac{1}{2}}(\lambda^{-1} - 1)^{\frac{m}{4} - \frac{n}{2}} u^{-\frac{m}{2}} \vartheta(u^{-1}, 1-\lambda, \mathfrak{S}\mathfrak{X}, \mathfrak{S}^{-1}). \tag{3}$$

Die Definition der Zetafunktion erfordert die Erklärung der Begriffe Gruppenmaß und Darstellungsmaß. Im m^2-dimensionalen Raume der reellen $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}^{(m)}$ gilt eine Reduktionstheorie für den Übergang $\mathfrak{X} \to \mathfrak{U}\mathfrak{X}$. Wird $\mathfrak{X}$ auf $\mathfrak{T} = \mathfrak{X}'\mathfrak{S}\mathfrak{X}$ abgebildet, so entspricht jedem Gebiet g von endlichem Inhalt des $\mathfrak{T}$-Raumes ein reduziertes Gebiet g^* des $\mathfrak{X}$-Raumes, das im allgemeinen wieder endlichen Inhalt besitzt. Danach wird das Maß $\mu(\mathfrak{S})$ der Einheitengruppe $\Gamma(\mathfrak{S})$ durch

$$\tfrac{1}{2}\varrho_m S^{-\frac{m}{2}} T_0^{-\frac{1}{2}} \mu(\mathfrak{S}) = \lim_{g \to \mathfrak{T}_0} \int_{g^*} d\mathfrak{X} : \int_g d\mathfrak{T} \tag{4}$$

erklärt. Hier bedeutet $\mathfrak{T}_0$ einen festen Punkt im $\mathfrak{T}$-Raum und ϱ_m den rechtsstehenden Grenzquotienten für $\mathfrak{S} = \mathfrak{T} =$ Einheitsmatrix $\mathfrak{E}^{(m)}$. Die Zahlfaktoren auf der linken Seite sind so gewählt, daß $\mu(\mathfrak{S})$ für positives $\mathfrak{S}$ mit dem reziproken Wert der Ordnung von $\Gamma^*(\mathfrak{S})$ zusammenfällt. ($\Gamma^*(\mathfrak{S})$ entsteht aus $\Gamma(\mathfrak{S})$ durch Identifizieren von $\mathfrak{U}$ mit $-\mathfrak{U}$). Durch das Verfahren der quadratischen Ergänzung gelangt Verf. zu einem Ausdruck von $\mu(\mathfrak{S})$ durch ein $n(m-n)$-faches Integral:

$$\mu(\mathfrak{S}) = \sigma_{m,n} S^{\frac{n}{2}} \int_{g(\mathfrak{S})} |\mathfrak{Z}'\mathfrak{S}\mathfrak{Z}|^{-\frac{m}{2}} d\mathfrak{P}. \tag{5}$$

$\sigma_{m,n}$ ist im wesentlichen ein Produkt von Γ-Funktionswerten; $g(\mathfrak{S})$, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{P}$ unterliegen dem folgenden Zusammenhang: Man ergänze $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}^{(m-n,n)}$ durch die Einheitsmatrix $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}^{(n)}$ zu $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}^{(m,n)} = \begin{pmatrix} \mathfrak{P} \\ \mathfrak{E} \end{pmatrix}$

und zerlege die Einheit $\mathfrak{U}$ nach dem Besetzungsschema $(m-n,n)$ in der Gestalt

$$\mathfrak{U}=\begin{pmatrix}\mathfrak{U}_1 & \mathfrak{U}_2\\ \mathfrak{U}_3 & \mathfrak{U}_4\end{pmatrix};$$

dann ist die Gruppe der Transformationen

$$\mathfrak{P}\to\mathfrak{P}_1=(\mathfrak{U}_1\mathfrak{P}+\mathfrak{U}_2)(\mathfrak{U}_3\mathfrak{P}+\mathfrak{U}_4)^{-1} \tag{6}$$

zu $\Gamma^*(\mathfrak{S})$ isomorph und besitzt im Teilraum $\mathfrak{Z}'\mathfrak{S}\mathfrak{Z}>0$ einen Fundamentalbereich $g(\mathfrak{S})$.

Zur Erklärung des Darstellungsmaßes sei $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}^{(m,1)}$ rational und nicht null. Die Einheiten $\mathfrak{U}$ mit $\mathfrak{U}\mathfrak{a}=\mathfrak{a}$ bilden eine Untergruppe $\Gamma(\mathfrak{S},\mathfrak{a})$ von $\Gamma(\mathfrak{S})$. Für rationales r ist $\Gamma(\mathfrak{S},\mathfrak{a})=\Gamma(\mathfrak{S},r\mathfrak{a})$. Ist r^{-1} der größte gemeinsame Teiler der Elemente von $\mathfrak{a}$, so heißt $\mathfrak{a}_0=r\mathfrak{a}$ primitiv. Für $t_0=\mathfrak{a}_0'\mathfrak{S}\mathfrak{a}_0\neq 0$ erweist sich $\Gamma(\mathfrak{S},\mathfrak{a})$ als einstufig isomorph zur Gruppe derjenigen Einheiten $\mathfrak{W}$ eines $\mathfrak{K}=\mathfrak{K}^{(m-1)}$, welche mit einem festen b der Kongruenz $\mathfrak{M}'b\equiv\ b \pmod{t_0}$ genügen. $\mathfrak{K}$ hat die Signatur $(n-1,m-n)$ bzw. $(n,m-n-1)$ für $t_0\gtrless 0$, besitzt also, von gewissen Ausnahmen mit $m=3$ abgesehen, ein Gruppenmaß $\mu(\mathfrak{K})$. Bezeichnet $j(\mathfrak{S},\mathfrak{a})$ den Index von $\Gamma(\mathfrak{S},\mathfrak{a})$ in $\Gamma(\mathfrak{K})$, so heißt $\mu(\mathfrak{S},\mathfrak{a})=j(\mathfrak{S},\mathfrak{a})\mu(\mathfrak{K})$ das Gruppenmaß von $\Gamma(\mathfrak{S},\mathfrak{a})$. Ferner heißt

$$M(\mathfrak{S},t)=\sum_{\mathfrak{a}'\mathfrak{S}\mathfrak{a}=t}\mu(\mathfrak{S},\mathfrak{a}) \tag{7}$$

das Darstellungsmaß der ganzen Zahl $t\neq 0$ durch $\mathfrak{S}$; dabei durchläuft $\mathfrak{a}$ ein volles System nicht-assoziierter ganzer Lösungen von $\mathfrak{a}'\mathfrak{S}\mathfrak{a}=t$.

Zur Erklärung von $M(\mathfrak{S},0)$, wenn $\mathfrak{S}$ eine Nullform, sei $\mathfrak{a}'\mathfrak{S}\mathfrak{a}=0$, $\mathfrak{a}$ primitiv. $\Gamma(\mathfrak{S},\mathfrak{a})$ ist einstufig isomorph zur Gruppe der einem $\mathfrak{K}=\mathfrak{K}^{(m-2)}$ zugeordneten affinen Abbildungen im $(m-2)$-dimensionalen $\mathfrak{z}$-Raum:

$$\mathfrak{z}=\mathfrak{W}\mathfrak{z}+\mathfrak{q};\quad \mathfrak{W}=\mathfrak{W}^{(m-2)},\quad \mathfrak{q}\text{ ganz};\quad \mathfrak{W}'\mathfrak{K}\mathfrak{W}=\mathfrak{K}, \tag{8}$$

für die gewisse Kongruenzvorschriften bezüglich $\mathfrak{W}$ und $\mathfrak{q}$ bestehen. $\Gamma(\mathfrak{S},\mathfrak{a})$ hat mithin endlichen Index $j(\mathfrak{S},\mathfrak{a})$ in der durch (8) allein definierten Abbildungsgruppe. Ist p der größte gemeinsame Teiler der Elemente von $\mathfrak{S}\mathfrak{a}$, so setzt man

$$\mu(\mathfrak{S},\mathfrak{a})=p^{-1}j(\mathfrak{S},\mathfrak{a})\mu(\mathfrak{K})$$

und definiert $M(\mathfrak{S},t)$ für $t=0$ durch (7).

Nach diesen Vorbereitungen wird die Zetafunktion $\zeta(\mathfrak{S},s)$ durch

$$\zeta(\mathfrak{S},s)=\sum_{t>0}M(\mathfrak{S},t)t^{-s} \tag{9}$$

erklärt; t durchläuft alle durch $\mathfrak{S}$ ganzzahlig darstellbaren positiven Zahlen. Der Fall einer ternären Nullform mit der Signatur $(2,1)$ ist auszuschließen, da die $M(\mathfrak{S},t)$ dann nicht sämtlich endlich sind. Nach der Reduktionstheorie konvergiert die Reihe für $\Re s>\frac{m}{2}$. Über $\zeta(\mathfrak{S},s)$ werden folgende Sätze bewiesen:

1) $\zeta(\mathfrak{S},s)$ ist in der endlichen s-Ebene regulär bis auf einen Pol erster Ordnung bei $s=\frac{m}{2}$ und einen etwaigen Pol erster Ordnung bei $s=1$. Das Residuum bei $s=\frac{m}{2}$ ist

$$\varrho(\mathfrak{S})=\frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}S^{-\frac{1}{2}}\mu(\mathfrak{S}).$$

2) $\varphi(\mathfrak{S},s)=\pi^{-s}\Gamma(s)\zeta(\mathfrak{S},s)$ erfüllt die Funktionalgleichung

$$S^{\frac{1}{2}}\sin(\pi s)\varphi(-\mathfrak{S},s)=\sin\left(\pi s-\frac{\pi n}{2}\right)\varphi\left(-\mathfrak{S}^{-1},\frac{m}{2}-s\right)+\sin\frac{\pi n}{2}\varphi\left(\mathfrak{S}^{-1},\frac{m}{2}-s\right).$$

3) $\zeta(\mathfrak{S},s)$ hat bei $s=1$ nur dann einen Pol, wenn entweder $m-n$ ungerade ist und $\mathfrak{S}$ die Null rational darstellt, oder aber, wenn $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x}$ eine Quaternionen-Nullform ist (d. h. wenn $m=4$ und $|\mathfrak{S}|$ das Quadrat

einer rationalen Zahl ist). Im ersten Falle hat das Residuum bei $s = 1$ den Wert

$$\varrho_1(\mathfrak{S}) = (-1)^{\frac{m-n-1}{2}} (2\pi)^{2-m} \Gamma(m-2)\zeta(m-2) M(\mathfrak{S}, 0).$$

4) Das Residuum $\varrho_1(\mathfrak{S})$ bei $s = 1$ im zweiten Falle wird durch eine Formel gegeben, die hier nicht reproduziert werden soll.

Auf die Beweise dieser Sätze kann an dieser Stelle nicht eingegangen werden. Es soll nur der Beweisansatz skizziert werden. Dieser besteht in einer Integralformel, durch die $\zeta(\mathfrak{S}, s)$ mit der oben erklärten Thetareihe verknüpft ist.

Es sei $\mathfrak{a}$ ganz und es durchlaufe $\mathfrak{a}_1$ alle mit $\mathfrak{a}$ assoziierten Spalten. Man bilde mit $u > 0$ die Reihe

$$\psi(\mathfrak{a}, u) = \sum_{\mathfrak{a}_1} \int_{g(\mathfrak{S})} |\mathfrak{Z}'\mathfrak{S}\mathfrak{Z}|^{-\frac{m}{2}} e^{u\mathfrak{a}_1'\mathfrak{H}\mathfrak{a}_1} d\mathfrak{P}. \tag{10}$$

Ist $\mathfrak{a}$ nicht der Nullvektor, g ein Gebiet im Raume der positiven symmetrischen $\mathfrak{T}$, $g^*(\mathfrak{a})$ das durch $\mathfrak{T} = \mathfrak{X}'\mathfrak{S}\mathfrak{X}$ definierte, in bezug auf $\Gamma(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})$ reduzierte Gebiet im $\mathfrak{X}$-Raum, so entsteht durch Integration von (10) nach $d\mathfrak{T}$ aus der Verknüpfung der beiden Integrationen die Formel

$$\int_g \psi(\mathfrak{a}, u) d\mathfrak{T} = 2\varrho_n^{-1} \int_{g^*(\mathfrak{a})} T^{\frac{n-m+1}{2}} e^{u\mathfrak{a}'\mathfrak{H}\mathfrak{a}} d\mathfrak{X},$$

in der ϱ_n ein gewisses Produkt von Γ-Funktionswerten bezeichnet. Die rechte Seite läßt sich in das Produkt eines eindimensionalen Integrals mit dem Integral $\int_g d\mathfrak{T}$ überführen, wobei überdies der Faktor $\mu(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})$ heraustritt. Damit erhält man eine brauchbare Darstellung für $\psi(\mathfrak{a}, u)$ und hierauf nach Integration über u die Darstellung der ζ-Reihe durch ein Integral, unter dem nunmehr nach Vereinigung der Summationen über die nicht-assoziierten $\mathfrak{a}$ in (7), (9) und über die zu $\mathfrak{a}$ assoziierten $\mathfrak{a}_1$ in (10) im wesentlichen die volle Thetareihe erscheint. Das genannte eindimensionale Integral ist eine hypergeometrische Funktion. Wird $x = \dfrac{\lambda}{1-\lambda}$ gesetzt, und bedeuten $P(s, x)$ einen gewissen elementaren Ausdruck in s und x, $f_1(s, x)$, $f_2(s, x)$ gewisse hypergeometrische Integrale, so lautet die Integralformel:

$$P(s,x)\{f_1(s,x)\varphi(\mathfrak{S},s) + f_2(s,x)\varphi(-\mathfrak{S},s)\} =$$
$$\int_{g(\mathfrak{S})} |\mathfrak{Z}'\mathfrak{S}\mathfrak{Z}|^{-\frac{m}{2}} \left\{ \int_0^\infty u^{s-1} \sum_{\mathfrak{a}'\mathfrak{S}\mathfrak{a}\neq 0} e^{\pi\gamma u\mathfrak{a}'\mathfrak{H}\mathfrak{a}} du \right\} d\mathfrak{P}.$$

Der Beweis für die analytische Fortsetzung und die Funktionalgleichung wird zunächst für die linke Seite von (11) durchgeführt. Hieraus ergeben sich die genannten Sätze durch Elimination von $f_1(s, x)$ und $f_2(s, x)$. (IV 4 D.)

Reviewer: Petersson, H., Prof. (Straßburg)

Full Text: DOI Link EuDML