Radó, Tibor

Subharmonic functions. (English) JFM 63.0458.05

Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 5, No. 1. Berlin: Julius Springer. V + 56 p. (1937).

Verf. geht zunächst auf Eigenschaften und Kriterien subharmonischer Funktionen ein. Die Sätze, welche fast durchweg mit kurzen Beweisen versehen sind, werden der Bequemlichkeit halber für den zweidimensionalen Fall formuliert. Weiterhin wird dann die Beziehung der subharmonischen Funktionen zum logarithmischen Potential und zu den harmonischen Funktionen untersucht.

Die subharmonischen Funktionen werden definiert als aufwärts halbstetige Funktionen, die nicht positiv unendlich werden, aber auch nicht identisch $-\infty$ sind. In jedem ganz im Inneren des Definitionsgebiets gelegenen Teilbereich sollen sie keine harmonische Funktion übertreffen, die sie am Rande nicht übertreffen. Später wird gezeigt, daß aus diesen Bedingungen bereits folgt, daß eine subharmonische Funktion in einer überall dichten Punktmenge $> -\infty$ ist. Charakteristisch für subharmonische Funktionen ist, daß sie in keinem inneren Punkte den Mittelwert über den Rand oder das Innere eines beliebigen Kreises übertreffen. Die Mittelwerte sind monotone Funktionen des Radius und konvexe Funktionen seines Logarithmus. Es werden weiter Kriterien angegeben, wann auch der Logarithmus einer positiven subharmonischen Funktion subharmonisch ist. Dies findet z. B. Verwendung beim Beweis des Satzes, daß die Minimalflächen dadurch charakterisiert sind, daß der Abstand eines Flächenpunktes von einem beliebigen Punkte des Raumes sowie dessen Logarithmus subharmonische Funktionen der isothermen Flächenparameter sind. Ersetzt man in der Definition der subharmonischen Funktionen die Halbstetigkeit durch Summierbarkeit über jeden abgeschlossenen Teilbereich des Definitionsgebietes und läßt man die Mittelwerteigenschaft nur fast überall gelten, so erhält man fast subharmonische Funktionen, die aber durch passende Abänderung in einer Nullmenge subharmonisch gemacht werden können. Der nächste Abschnitt ist im wesentlichen der Einführung des logarithmischen Potentials einer positiven Massenbelegung gewidmet. Im folgenden wird die "best harmonic majorant" (B. H. M.) und die "least harmonic majorant" (L. H. M.) definiert. Die erstere ist in jedem echten *Dirichlet*schen Teilbereich definiert und zwar als die untere Grenze von harmonischen Funktionen, die im abgeschlossenen Teilbereich stetig sind und die subharmonische Funktion übertreffen. Die L. H. M. erhält man als Grenzfunktion der B. H. M. für Teilgebiete, die das gegebene Gebiet von Innen approximieren. Für *Dirichlet*sche Gebiete fällt sie mit der B. H. M. zusammen. Sie existiert auch für das ganze Definitionsgebiet, falls es überhaupt eine harmonische Majorante gibt. In diesem Falle läßt sich die subharmonische Funktion im ganzen Definitionsgebiet als Summe eines logarithmischen Potentials und der B. H. M. darstellen, wobei die Gesamtmasse auch unendlich werden kann. Im folgenden werden Analogien zwischen subharmonischen und harmonischen Funktionen behandelt. Ist z. B. P ein isolierter singulärer Punkt einer subharmonischen Funktion, in dessen Umgebung eine harmonische Majorante existiert, so wird der Mittelwert mit abnehmendem Radius höchstens logarithmisch unendlich. Erwähnt seien noch die Ausführungen über die Annäherung im Mittel gegen die Werte auf dem Rande eines Kreises.

Besprechung: A. Buhl, Enseign. math. 36, 414-415.

Reviewer: Tautz, G., Dr. (Breslau)