Weil, A.

Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale. (French) JFM 63.0569.04

Actual. sci. industr. 551, 39 p. (Publications de l'institut mathématique de l'université de Strasbourg) (1937).

Die uniforme Struktur eines Raumes R wird bewirkt durch die Zuordnung der verschiedenen Umgebungen der verschiedenen Punkte von R zueinander. Dies kann so geschehen: Es liegt ein System $\mathfrak{s}$ von Indices σ vor; jedem $x \in R$ und $\sigma \in \mathfrak{s}$ ist eindeutig ein $U_\sigma(x) \subset R$ (σ-Umgebung von x) zugeordnet. Für $y \in R$ sei $U^*_\sigma(y) = \sum\limits_{y \in U_\sigma(x)} x$, und für $M \subset R$ werde $U_\sigma(M) = \sum\limits_{x \in M} U_\sigma(x)$ gesetzt. Axiome sind: Für jedes $x \in R$ gelte: (1) $\prod\limits_{\sigma \in \mathfrak{s}} U_\sigma(x) = x$. – (2) Zu $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathfrak{s}$ gibt es ein $\sigma_3 \in \mathfrak{s}$ mit

$$U_{\sigma_3}(x) \subset U_{\sigma_1}(x) U_{\sigma_2}(x).$$

(3) Zu $\sigma_1 \in \mathfrak{s}$ existiert ein $\sigma_2 \in \mathfrak{s}$ mit $U_{\sigma_2}(U^*_{\sigma_2}(x)) \subset U_{\sigma_1}(x)$. Man kann $\{U_\sigma(x)\}$ auffassen als ein System von (mehrmehrdeutigen) Abbildungen des Raumes R auf sich, wobei $U^*_\sigma(x)$ die Umkehrung von $U_\sigma(x)$ bedeutet. (Diese Abbildungen lassen sich auch deuten als Punktmengen V_σ in $R^2 = R \times R$, welche die "Diagonalmenge" Δ aller $(x, x), x \in R$, überdecken). Ist $U^*_\sigma(x) = U_\sigma(x)$, so hat man ein symmetrisches System; $W_\sigma(x) = U_\sigma(x) U^*_\sigma(x)$ ist ein zu $U_\sigma(x)$ äquivalentes symmetrisches System. Man kann auch mit Hilfe von Überdeckungen uniforme Raumstrukturen erzeugen. Bei topologischen Gruppen kommt noch ein viertes Axiom hinzu, welches die Äquivalenz der $U_\sigma(x)$ bei Transformation durch die Gruppenoperationen ausdrückt. -Jeder uniforme Raum R ist vollregulär und einer in einem durch R im wesentlichen eindeutig bestimmten vollständigen Raum $\tilde{R}$ überall dichten Teilmenge isomorph. (Jede auf einer Teilmenge A eines uniformen Raumes gleichmäßig stetige Abbildung f in einen vollständigen uniformen Raum läßt sich auf $\bar{A}$ gleichmäßig stetig erweitern.) Wegen der Vollregularität von R sind die *Tychonoff*schen Ergebnisse (Math. Ann. 102 (1929), 544-561; JFM 55.0963.*) anwendbar; jeder kompakte Raum ist einer uniformen Struktur fähig, und diese ist durch die topologische Struktur des Raumes eindeutig bestimmt. Damit die Vervollständigung $\tilde{A}$ des uniformen Raumes A kompakt sei, ist notwendig und hinreichend, daß man zu jedem $\sigma \in \mathfrak{s}$ endlich viele Punkte $x_i \subset A$ angeben kann mit $A \subset \sum\limits_i U_\sigma(x_i)$. Ein zusammenhängender, im kleinen kompakter topologischer Raum ist dann und nur dann ein uniformer Raum mit der Eigenschaft, daß für ein gewisses $\sigma_0 \in \mathfrak{s}$ alle $U_{\sigma_0}(x)$, $x \in R$, kompakt sind, wenn er "im Unendlichen abzählbar" ist. Schließlich behandelt Verf. das Problem der vollständigen Erweiterung bei topologischen Gruppen.

Reviewer: Aumann, G., Prof. (Frankfurt am Main)