Stone, M. H.

Applications of the theory of Boolean rings to general topology. (English) JFM 63.1173.01

Trans. Am. Math. Soc. 41, 375-481 (1937).

Verf. bringt seine in einer früheren Arbeit (Trans. Am. Math. Soc. 40, 37–111 (1936; JFM 62.0033.04)] entwickelte Theorie der Booleschen Ringe in Beziehung zur abstrakten mengentheoretischen Topologie.

Die Menge $\mathfrak{E}$ aller Primideale eines *Boole*schen Ringes A läßt sich auf folgende Weise topologisieren: Jede Menge $\mathfrak{E}(\mathfrak{a})$ aller derjenigen Primideale von A, die nicht Teiler eines beliebigen Ideals $\mathfrak{a}$ aus A sind, werde als Umgebung eines jeden Elementes $\mathfrak{p} \in \mathfrak{E}(\mathfrak{a})$ definiert. $\mathfrak{E}$ wird dadurch ein total zusammenhangsloser, lokal bikompakter *Hausdorff*scher Raum, und die Teilmengen $\mathfrak{E}(\mathfrak{a})$ sind dann gerade die offenen Mengen von $\mathfrak{E}$. Die bikompakten offenen Mengen von $\mathfrak{E}$ bilden ein topologisch äquivalentes Umgebungssystem; sie sind als diejenigen $\mathfrak{E}(\mathfrak{a})$ gekennzeichnet, für die $\mathfrak{a}$ ein Hauptideal aus A ist. Ist umgekehrt $\mathfrak{S}$ ein total zusammenhangsloser, lokal bikompakter *Hausdorff*scher Raum – Verf. nennt solche Räume *Boole*sche Räume –, so bilden die bikompakten offenen Teilmengen von $\mathfrak{S}$ einen *Boole*schen Ring A, und der zu A gehörige Raum $\mathfrak{E}$ der Primideale ist homöomorph $\mathfrak{S}$. Die Theorie der *Boole*schen Ringe ist also logisch äquivalent der Theorie der *Boole*schen Räume. Dieser Zusammenhang zwischen Algebra und Topologie wird vom Verf. weiter verfolgt. Insbesondere beschäftigt sich Verf. mit der Konstruktion von *Boole*schen Universalräumen für jede Kardinalzahl. So ist z. B. jeder separable *Boole*sche Raum homöomorph einer Teilmenge des *Cantor*schen Diskontinuums $\mathfrak{D}$ und jeder höchstens abzählbare *Boole*sche Ring somit homomorph dem durch $\mathfrak{D}$ bestimmten *Boole*schen Ring.

Auf dieser Grundlage sucht Verf. nun Darstellungen eines beliebigen topologischen Raumes in *Boole*schen Ringen zu gewinnen, um so algebraische Methoden auf Probleme der allgemeinen mengentheoretischen Topologie anwenden zu können. Das Hilfsmittel besteht in folgenden Begriffsbildungen (vgl. dazu *P. Alexandroff* and *H. Hopf* [Topologie I. Berlin: J. Springer (1935; JFM 61.0602.07)], insbesondere S. 66): Ein beliebiges System Y von nicht leeren abgeschlossenen Teilmengen $\mathfrak{Y}$ eines T_1-Raumes $\mathfrak{S}$ wird durch die Festsetzung topologisiert, daß jedes Teilsystem von Y, das aus allen in einer offenen Menge von $\mathfrak{S}$ enthaltenen Mengen $\mathfrak{Y}$ besteht, als Umgebung eines jeden seiner Elemente anzusehen ist. Y ist dadurch als ein T_c-Raum erklärt. Ist nun $\mathfrak{R}$ ein dem Raum Y homöomorpher topologischer Raum, so heißt die Beziehung zwischen $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ und Y eine Darstellung von $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{S}$ vermöge Y. Die Darstellung heißt irredundant, wenn jede nicht leere offene Menge von $\mathfrak{S}$ wenigstens eine Menge $\mathfrak{Y}$ aus Y enthält. Verf. entwickelt zunächst eine allgemeine Darstellungstheorie. Das Hauptergebnis ist: Jeder T_0-Raum $\mathfrak{R}$ kann in einem geeigneten *Boole*schen Raum $\mathfrak{S}$ irredundant dargestellt werden. Für eine solche Darstellung gibt Verf. ein Konstruktionsverfahren an, und es folgt, daß die Darstellung durch $\mathfrak{R}$ bis auf Homöomorphien bestimmt ist. In Verbindung mit dem Ergebnis des ersten Teiles der Arbeit ergibt sich also, daß die algebraische Theorie der *Boole*schen Ringe der topologischen Theorie der T_0-Räume logisch äquivalent ist. Auf diese Weise ist es möglich, algebraische Methoden auf topologische Fragen anzuwenden. Die wichtigsten Anwendungen betreffen die Einbettungs- oder Erweiterungsprobleme. Hier sollen nur zwei Sätze angeführt werden, die *Alexandroff* und *Urysohn* vermutet haben, die aber bisher nicht bewiesen werden konnten: Jeder *Hausdorff*sche Raum kann als dichte Teilmenge in einem absolut abgeschlossenen *Hausdorff*schen Raum eingebettet werden. Ein *Hausdorff*scher Raum ist dann und nur dann bikompakt, wenn jede seiner abgeschlossenen Teilmengen absolut abgeschlossen ist. (III 5 B.)

Reviewer: Rinow, W., Dr. (Berlin)

MSC:

54-XX	General topology
06E15	Stone spaces (Boolean spaces) and related structures

Full Text: DOI