Kolmogoroff, A.

Über die beste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionenklasse. (German)

JFM 62.0283.02
Ann. Math., Princeton, 37, 107-110 (1936).

Betrachtet man das Problem der Annäherungen einer Funktion f durch lineare Formen

$$\varphi = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \cdots + c_n\varphi_n$$

mit festen Funktionen φ_1, φ_2,..., φ_n, so entsteht die Aufgabe (das *Tchebycheff*sche Problem), mit Hilfe einer geeigneten Wahl der Koeffizienten c_1, c_2,..., c_n, die Entfernung $\varrho(f,\varphi)$ möglichst klein zu machen. Mit $E_n(f)$ wird die untere Grenze von $\varrho(f,\varphi)$ bezeichnet. Für eine Klasse F von Funktionen f wird weiter mit $E_n(F)$ die obere Grenze von $E_n(f)$ für alle f aus F bezeichnet. Verf. stellt eine neue Aufgabe: bei gegebenen F und n durch die Wahl von Funktionen φ_1, φ_2,..., φ_n das Minimum zu erreichen. Mit $D_n(F)$ wird die untere Grenze von $E_n(F)$ bezeichnet. Wenn $E_n(F)$ wirklich das Minimum $D_n(F)$ erreicht, so kann man auch die Eindeutigkeitsfrage stellen, und zwar in folgendem Sinne: Sind die Funktionen φ_1, φ_2,..., φ_n, welche das Minimum $D_n(F)$ realisieren, bis auf eine lineare Transformation eindeutig bestimmt oder nicht?

Verf. betrachtet weiter nur die Funktionen einer reellen Veränderlichen, welche auf der Strecke (0, 1) definiert sind. Als Entfernung führt er

$$\varrho(f,\varphi) = \left[\int_0^1 (f-\varphi)^2\,dx\right]^{\frac{1}{2}}$$

ein. Unter diesen Voraussetzungen gelingt es dem Verf., für die folgenden Funktionenklassen einfache Resultate zu erhalten:

1. $F_p (p \geqq 1)$ besteht aus allen p-fach differenzierbaren Funktionen f mit

$$\int_0^1 \{f^{(p)}\}^2\,dx \leqq 1.$$

2. $F_p^*(p \geqq 1)$ besteht aus allen Funktionen von F_p, welche den Periodizitätsbedingungen $f(0) = f(1)$, $f'(0) = f'(1)$,..., $f^{(p-1)}(0) = f^{(p-1)}(1)$ genügen.

Reviewer: Kempisty, S., Prof. (Wilna)

Full Text: DOI