Lengyel, B. A.; **Stone, M. H.**

Elementary proof of the spectral theorem. (English) JFM 62.0450.02

Ann. math., Princeton, (2) 37, 853-864 (1936).

Beweise der Existenz einer Spektralzerlegung einer selbstadjungierten (hypermaximalen) Transformation im *Hilbert*schen Raume findet man schon viel in der Literatur. Einige sind nur dann gültig, wenn die Transformation beschränkt ist; andere dagegen behandeln den allgemeinen Fall. Aber diese Beweise gründen sich alle auf verschiedene Resultate der Funktionentheorie: wir erwähnen, als ein Beispiel, den *Weierstraß*schen Approximationssatz.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist, diesen Satz im beschränkten Fall durch elementare Methoden zu beweisen, d. h. durch Methoden, die sich nur auf die Eigenschaften des *Hilbert*schen Raumes stützen. Der Beweis wird für den allgemeineren Fall eines komplexen euklidischen Raumes $\mathfrak{L}$ gegeben (vgl. *Löwig*, Acta Litt. Sci. Univ., Szeged, Sect. Sci. math. 7 (1934), 1-33; JFM 60.0324.*), was bekanntlich keine wesentlichen neuen Schwierigkeiten macht.

Die Spektralzerlegung ist leicht zu folgern, wenn die zwei folgenden Sätze für positiv definites H bewiesen werden: (1) Sei $\mathfrak{M}$ die Menge der $f \in \mathfrak{L}$, für welche $|H^k f| \leqq |f|$, $k \geqq 1$; dann ist $\mathfrak{M}$ linear und abgeschlossen. Ihr Projektionsoperator sei F. Ist A mit H vertauschbar, dann ist A mit F vertauschbar. (2) Sei $\mathfrak{M}$ das Orthogonalkomplement von $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N} = \mathfrak{L} - \mathfrak{M}$; dann ist $(Hf, f) > (f, f)$ für jedes $f\,(\neq 0) \in \mathfrak{N}$. Der Beweis des zweiten Teils stützt sich auf einige interessante Betrachtungen, in welchen die schwache Konvergenz eine ausschlaggebende Rolle spielt.

Reviewer: Lorch, E. R., Dr. (New York)

Full Text: DOI