Grosheide F. Wzn., G. H. A.
Über Differentialoperatoren, Minimaloperatoren, Minimalpolynome und Differentialgleichungen. (German) JFM 62.0542.01
Compositio math., Groningen, 3, 373-379 (1936).

Zu einem linearen Differentialoperator

$$A = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad a_i = a_i(x_1, x_2, \dots, x_n),\ n \geqq 1,$$

lassen sich Polynome

$$P(A) = (A - \varrho_1)^{\alpha_1}(A - \varrho_2)^{\alpha_2} \cdots (A - \varrho_\lambda)^{\alpha_\lambda} \quad (\varrho_i \neq \varrho_k, \quad \sum \alpha_i = m)$$

bilden, so daß $P(A)(y) = 0$ eine lineare homogene Differentialgleichung m-ter Ordnung darstellt.

Zuerst wird bewiesen, daß sich jede Lösung y dieser Differentialgleichung als Summe von λ Funktionen $y^{(i)}$ schreiben läßt:

$$y = y^{(1)} + y^{(2)} + \cdots + y^{(\lambda)},$$

wobei $y^{(i)}$ der Gleichung

$$(A - \varrho_i)^{\alpha_i}(y^{(i)}) = 0$$

genügt. Der Beweis ergibt sich analog der Zerlegung einer Matrix mit Hilfe der Kovarianten von *Frobenius*. Auch der Begriff "Minimalpolynom von y" existiert hier.

In einem weiteren Satze wird bewiesen, daß das Produkt z der Funktionen y_1, y_2,..., y_ν mit den Minimalpolynomen

$$(A - \varrho_1)^{\alpha_1},\ (A - \varrho_2)^{\alpha_2}, \dots,\ (A - \varrho_\nu)^{\alpha_\nu}$$

das Minimalpolynom

$$(A - \varrho_1 - \varrho_2 - \cdots - \varrho_\nu)^{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu - \nu + 1}$$

besitzt. Hierzu werden zuerst vier Hilfssätze bewiesen, wovon der erste eine Erweiterung der Formel von *Leibniz* für die n-te Ableitung eines Produktes darstellt.

Zum Schlusse wird der besondere Fall $n = 1$ behandelt. Hier ergibt sich eine Antwort auf die Frage: Sind y_1, y_2,...Lösungen von gegebenen, linearen homogenen Differentialgleichungen, wie findet man die Differentialgleichung niedrigster Ordnung, der das Produkt

$$z = y_1 y_2 \dots$$

genügt?

Reviewer: Weitzenböck, R., Prof. (Laren)

Full Text: EuDML