Stepanoff, W.
Sur une extension du théorème ergodique. (French) JFM 62.0995.02
Compositio math., Groningen, 3, 239-253 (1936).

Eine Strömung in einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit G sei durch ein System von Gleichungen bestimmt, die im kleinen von der Form

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \dots, x_n) \qquad (i = 1, \dots, n)$$

sind. Die X_i mögen *Lipschitz*bedingungen (im kleinen) erfüllen. $f(p,t)$ bezeichne die Bewegung eines willkürlichen Punktes p, und die Bewegung eines jeden p sei für alle t definiert. Die Strömung besitze überdies eine Integralinvariante $\int M(x)\,d\omega$, so daß

$$\int\limits_{\Omega} M\,d\omega = \int\limits_{f(\Omega,t)} M\,d\omega$$

für jedes kompakte $\Omega \subset G$ und $\int\limits_G M\,d\omega = \infty$. Schließlich sei G unzerlegbar, d. h. nicht als Summe zweier disjunkter invarianter Mengen mit von null verschiedenem Maß darstellbar. Unter diesen Voraussetzungen zeigt Verf., daß der "Ergodensatz" von *Birkhoff* (Proc. nat. Acad. Sci. USA 17 (1931), 656-660; F. d. M. 57_{I}, 1013) in der folgenden Form gilt: Ist v eine kompakte meßbare Menge und $\varphi_v(p,t)$ das Maß der Zeit, die ein sich bewegender Punkt $x = f(p,t)$ während des Zeitintervalls $(0,t)$ in v verbringt, dann gilt für fast alle Punkte p

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\varphi_v(p,t) = 0$$

(d. h. die "Aufenthaltswahrscheinlichkeit" von p bezüglich v ist null); überdies gilt, wenn v_1 und v_2 meßbar und kompakt sind, für fast alle p

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\varphi_{v_1}(p,t)}{\varphi_{v_2}(p,t)} = \frac{\int\limits_{v_1} M\,d\omega}{\int\limits_{v_2} M\,d\omega}.$$

Dies Ergebnis stellt eine Erweiterung des Ergodensatzes auf den Fall einer nicht-kompakten Strömung dar. Der Beweis besteht in der Einführung einer Funktion $\mu(x)$ von der Eigenschaft, daß $\int M\mu d\omega$ eine Integralinvariante für die Strömung $\dfrac{dx_i}{dt} = \dfrac{X_i}{\mu}$ und $\int\limits_G M\mu d\omega$ endlich ist; dann kann man den *Birkhoff*schen Satz anwenden.

Im Zusammenhang mit der Benutzung von Integralinvarianten zeigt Verf., daß die klassischen Bedingungen für deren Existenz auf den Fall ausgedehnt werden können, daß die Ableitungen von M sowie den X_i in einem Gebiet D des n-dimensionalen euklidischen Raumes beschränkt sind. Unter diesen Voraussetzungen ist notwendig und hinreichend dafür, daß $\int M d\omega$ invariant sei, die Gültigkeit der Gleichung $\sum \dfrac{\partial(MX_i)}{\partial x_i} = 0$ fast überall in D.

Die Arbeit schließt mit einem Beispiel einer Strömung, die alle oben aufgestellten Bedingungen erfüllt und die Eigenschaft hat, daß (1) jede Bewegung eine Zentralbewegung ist (*Birkhoff*, Dynamical systems (1927; F. d. M. 53, 732), chap. VII) und (2) ein Fixpunkt q existiert, so daß die Aufenthaltswahrscheinlichkeit jedes Punktes (ohne Ausnahme) bezüglich einer beliebigen Umgebung von q gleich 1 ist. Dieses Beispiel zeigt, daß eine gewisse invariante Menge (in diesem Falle q) dieselben Wahrscheinlichkeitseigenschaften wie die Zentralbewegungen haben und doch eine echte Teilmenge der letzteren sein kann.

Reviewer: Smith, P. A., Prof. (New York)

Full Text: EuDML