Koksma, Jurjen Ferdinand

Ein mengentheoretischer Satz über die Gleichverteilung modulo Eins. (German)

JFM 61.0205.01
Compositio math. 2, 250-258 (1935).

Bekanntlich weiß man noch nicht, ob die Zahlen e^x $(x = 1, 2, \dots)$ gleichverteilt mod 1 sind; Verf. beweist in dieser Richtung folgenden interessanten Satz: Für fast alle $\theta > 1$ ist θ^x gleichverteilt mod 1. Dieser Satz ergibt sich durch Spezialisierung des folgenden allgemeineren Ergebnisses: Seien α und β zwei reelle, endliche Zahlen mit $\alpha < \beta$; sei ferner $f(x, \theta)$ für jede natürliche Zahl x eine reelle stetige Funktion von θ für $\alpha \leqq \theta \leqq \beta$ und habe

$$\Phi(x_1, x_2, \theta) = f(x_1, \theta) - f(x_2, \theta) \qquad (\alpha \leqq \theta \leqq \beta)$$

für je zwei natürliche Zahlen x_1 und x_2 mit $x_1 \neq x_2$ eine stetige Ableitung Φ'_θ nach θ, die im Intervall $\alpha \leqq \theta \leqq \beta$ monoton und ungleich Null ist. Wird

$$A_N = \frac{1}{N^2} \sum_{x_1=1}^{N} \sum_{x_2=1}^{x_1-1} \operatorname{Max} \left(|\Phi'_\theta(x_1, x_2, \alpha)|^{-1},\ |\Phi'_\theta(x_1, x_2, \beta)|^{-1} \right)$$

für ganzes $N \geqq 2$ gesetzt, so gebe es eine monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen $N_1, N_2, \dots$ mit

$$\lim_{\nu \to \infty} \frac{N_{\nu+1}}{N_\nu} \to 1,$$

für die die Reihe $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} A_{N_\nu}$ konvergiert. Dann ist für fast alle θ aus $\alpha \leqq \theta \leqq \beta$ die Zahlfolge

$$f(x, \theta) \qquad (x = 1, 2, 3, \dots)$$

gleichverteilt mod 1.

Reviewer: Mahler, K., Dr. (Krefeld)

Full Text: EuDML