Doetsch, G.
Der Faltungssatz in der Theorie der Laplace-Transformation. (German) JFM 61.0449.02
Ann. Pisa (2) 4, 71-84 (1935).

Die Funktionen $F_1(t)$, $F_2(t)$ seien für $t \geqq 0$ quadratisch integrabel oder aber in jedem Intervall $0 < T_1 \leqq t \leqq T_2$ eigentlich integrabel und bis zum Nullpunkt uneigentlich absolut integrabel nach *Riemann*. Verf. bezeichnet den Ausdruck

$$F_1 * F_2 \equiv \int_0^t F_1(\tau)F_2(t-\tau)\,dr = \int_0^t F_1(t-\tau)F_2(\tau)\,d\tau$$

als "Faltung". Es gilt: $F_1 * F_2$ ist stetig,

$$F_1 * F_2 = F_2 * F_1, \quad (F_1 * F_2) * F_3) = F_1 * (F_2 * F_3).$$

Wird unter

$$L\{F\} \equiv \int_0^\infty e^{-st}F(t)\,dt = f(s)$$

wie üblich die *Laplace*-Transformation verstanden, so ist das Ziel der Arbeit die Untersuchung der Gültigkeit des *Faltungssatzes*:

$$L\{F_1 * F_2\} = L\{F_1\}L\{F_2\}. \tag{1}$$

Dies ist ausgeschrieben

$$\int_0^\infty e^{-st}\left\{\int_0^t F_1(t-\tau)F_2(\tau)\,d\tau\right\}dt = \int_0^\infty e^{-su}F_1(u)\,du \cdot \int_0^\infty e^{-sv}F_2(v)\,dv.$$

Bei absoluter Konvergenz von $L(F_1)$ und $L(F_2)$ für $s = s_0$ erkennt man hieraus durch Integrationsvertauschung rechts und die Substitution $u + v = t$ die absolute Konvergenz von $L\{F_1 * F_2\}$ für $s = s_0$ und die Gültigkeit von (1). Nach demselben Gedanken, nach dem der *Abel*sche Multiplikationssatz für Potenzreihen bewiesen wird, wird weiter aus der Konvergenz von $L(F_1)$, $L(F_2)$ sowie $L\{F_1 * F_2\}$ für $s = s_0$ die Gültigkeit von (1) erschlossen. Der Gültigkeitsbereich von (1) kann durch Hinzufügen geeigneter Faktoren erweitert werden. So gilt z. B: Wenn $L\{F_1\}$ und $L\{F_2\}$ für s_0 konvergieren, so ist für $\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(s_0)$

$$L\{e^{s_0 \cdot t} * F_1 * F_2\} = \frac{1}{(s-s_0)^2}L\{F_1\} \cdot LF_2\},$$

wobei das Integral links für $\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(s_0)$ absolut konvergiert. Ist unter der gleiches Annahme weiter das reelle $s_0 > 0$, so gilt für $\mathrm{Re}(s) > s_0$

$$L\{t * F_1 * F_2\} = \frac{1}{s^2}L\{F_1\} \cdot L\{F_2\}.$$

Eine weitere Möglichkeit zur Verallgemeinerung der Gültigkeit von (1) besteht in der Verallgemeinerung der *Laplace*schen Transformation. Diese geschieht durch Anwendung des vom Verf. eingeführten Begriffes "*Cesàro*-mediabel k-ter Ordnung" (Diss. Göttingen, 1920; F. d. M. 47, 199 (JFM 47.0199.*)), indem die L^k-Transformierte von F für den Wert s durch

$$L^k\{F\} = \lim_{t\to\infty}\frac{k}{t^k}\left[t^{k-1} * \int_0^t e^{-s\tau}F(\tau)\,d\tau\right]$$

für $k > 0$ erklärt wird; L^0 ist die gewöhnliche *Laplace*-Tranformation. Existiert L^k, so existiert auch $L^{k'}$

für $k' > k$. Der Konvergenzbereich von L^k kann größer sein als der von L, wie $F = e^{it}$ zeigt.

Es gilt der Faltungssatz: Wenn $L^{k_1}\{F_1\}$ und $L^{k_2}\{F_2\}$ mit $k_1 \geqq 0$, $k_2 \geqq 0$ für $s = s_0$, konvergieren, so konvergiert $L^{k_0}\{F_1 * F_2\}$ mit $k_0 = k_1 + k_2 + 1$ ebenfalls für s_0, und es ist dort

$$L^{k_0}\{F_1 * F_2\} = L^{k_1}\{F_1\} \cdot L^{k_2}\{F_2\}.$$

Der Spezialfall $k_1 = k_2 = 0$ liefert das Analogon zum Satz über die *Cesàro*summabilität der Produktreihe.

Reviewer: Hammerstein, A., Prof. (Kiel)

Full Text: EuDML