Duschek, A.

Zur geometrischen Variationsrechnung. III: Das Variationsproblem der F_m im Riemannschen R_n und eine Verallgemeinerung des Gauß-Bonnetschen Satzes. (German)

JFM 61.0790.02
Math. Z. 40, 279-291 (1935).

Verf. bemerkt einleitend: "*W. Mayer* und der Verf. haben kürzlich gezeigt" (Monatshefte f. Math. 40 (1933), 294-308; F. d. M. 59_{I}, 505), "daß man aus dem Verhalten des sogenannten *Euler*schen Vektors in einer Kurvenschar eine ganze Reihe wichtiger differentialgeometrischer Sätze erschließen kann. Im folgenden werden analoge Untersuchungen über den *Euler*schen Vektor einer einparametrigen Schar von m-dimensionalen Flächen F_m durchgeführt, allerdings von vornherein unter Beschränkung auf den *Riemann*schen R_n als Operationsraum. Auch hier steht wieder eine allgemeine Formel für die Ableitung des *Euler*schen Vektors nach dem Scharparameter im Mittelpunkte der Untersuchung. Diese Formel ist selbstverständlich aufs engste verknüpft mit dem Ausdruck für die zweite Variation der F_m im *Riemann*schen R_n und ist somit eine Art Verallgemeinerung einiger Formeln, die vor mehreren Jahren von *E.Bortolotti* aufgestellt worden sind (Mem. Accad. Sc. Ist. Bologna (7) 5 (1928), 43-48; Giorn. di Mat. 66 (1928), 153-186. F. d. M. 54; 765, 760).

"In der erwähnten Abhandlung zeigen wir, daß man aus der entsprechenden Formel, wenn man sie auf Kurven des *Riemann*schen R_2 anwendet, einen verhältnismäßig einfachen Beweis der *Gauß-Bonnet*schen Integralformel gewinnen kann. Die Vermutung lag nahe, daß man aus der allgemeinen Formel mittels analoger Methoden eine Verallgemeinerung dieses wichtigen Satzes der Flächentheorie erhalten könne, und das ist in der Tat der Fall. Allerdings zeigt sich ein wesentlicher, aber offenbar in der Natur der Sache begründeter Unterschied; während im zweidimensionalen die zum Beweis benutzte Kurvenschar in der Endformel nicht mehr erscheint, bleibt die entsprechende F_m-Schar im mehrdimensionalen erhalten, d. h. es erscheinen in der Endformel Größen, die von dieser Schar abhängen."

Die hier erwähnte Endformel des verallgemeinerten *Gauß-Bonnet*schen Satzes lautet:

$$\int\limits_R H\,do + \int\limits_G \left(C - mH^2 + \frac{1}{m\varphi}\varDelta\varphi + K_\nu\right) dv = 0.$$

Dabei bedeuten: R eine geschlossene F_m, H deren mittlere Krümmung,

$$do = \sqrt{\gamma}\,du_1\,du_2\dots du_m,$$

deren m-dimensionales Volumelement, G ein von der Schar

$$x_i(u_\alpha,\varepsilon) \quad (i = 1,\dots,m+1;\ \alpha = 1,\dots,m)$$

schlicht überdecktes Gebiet vom Rand R, C die *Casorati*krümmung der F_m, $\zeta^i = \varphi\nu^i = \dfrac{\partial x_i}{\partial\varepsilon}$, ν^i Normalvektor, $\varDelta$ zweiter *Beltrami*schen Differentiator, K_ν Richtungsinvariante der *Riemann*schen Krümmung der *Riemann*schen R_{m+1} in der Normalenrichtung ν^i, $dv = \varphi\sqrt{g}\,du_1\,du_2\dots du_m\,d\varepsilon$ (m + 1)-dimensionale Volumelement der R_{m+1}. Zwei weitere Formulierungen des Satzes sind durch die Formeln

$$\int\limits_R H\,do + \int\limits_G \left(\frac{1}{m\varphi^2}\nabla\varphi - mH^2 + K_\nu\right) dv = 0,$$
$$\int\limits_R H\,do + \int\limits_G \left(\frac{m+1}{m}K_R - K_F - K_\nu + \frac{1}{m\varphi}\varDelta\varphi\right) dv = 0$$

gegeben, worin K_F und K_R bzw. die Krümmungsskalare der F_m bzw. R_{m+1} bedeuten, und ∇ den ersten *Beltrami*schen Differentiator bezeichnet. (V 6 B.)

Reviewer: Pinl, M., Dr. (Prag)

Full Text: DOI