Kempisty, S.

Sur les bornes des fonctions réelles. (French) JFM 61.1103.03

Bull. Soc. math. France 63, 91-120 (1935).

Es gibt eine Reihe von Beziehungen zwischen den verschiedenen Grenzen (z. B. gewöhnliche obere und untere Grenzen) von Funktionen und den Iterationen dieser Grenzen. Verf. gibt eine allgemeine Darstellung dieser Dinge, in der die verschiedenen Einzelsätze als Sonderfälle enthalten sind. Die betrachteten Funktionen sind reelle Punktfunktionen $f(x)$ in einem Raum E der Variablen x. In dem Raum ist eine Mengenfunktion (opération fondamentale) φ definiert, durch die jeder Menge A in E eine Menge $\varphi(A)$ zugeordnet ist. Ist a eine gegebene Zahl, so wird unter der oberen Grenze $M_\varphi(f,a)$ von f in bezug auf φ an der Stelle a (borne supérieure de genre φ) die untere Grenze der Zahlen y verstanden, welche die Eigenschaft haben, daß a in der Menge $\varphi \underset{x}{E}[f(x) < y]$ enthalten ist, die durch die Operation φ der Menge der Zahlen x zugeordnet ist, für die $f(x) < y$ gilt. Ist z. B. $\varphi(A)$ das Innere von A in dem gewöhnlichen Sinne und E ein cartesischer Raum, so ist $M_\varphi(f,a)$ die obere Grenze oder das Maximum von $f(x)$ an der Stelle a. Die entsprechende untere Grenze $m_\varphi(f,a)$ wird durch

$$m_\varphi(f,a) = -M_\varphi(-f,a)$$

eingeführt. Es ist stets $m_\varphi(f,a) \leqq M_\varphi(f,a)$. Eine Funktion $f(x)$ heißt im Punkt a in bezug auf φ halbstetig nach oben, wenn

$$f(a) \geqq M_\varphi(f,a)$$

ist; halbstetig nach unten, wenn

$$f(a) \leqq m_\varphi(f,a)$$

ist.

Die Operation φ heißt eine untere Operation, wenn $\varphi(A) \subset A$ für jede Menge A gilt; rekurrent, wenn $\varphi\varphi(A) = \varphi(A)$ ist; nicht abnehmend, wenn $\varphi(A) \subset \varphi(B)$ für $A \subset B$ ist. Die Operation Φ heißt zu φ konjugiert, wenn $\Phi(A) = E - \varphi(E - A)$ ist. Für nicht-abnehmende, untere und rekurrente Operationen φ gilt z. B.

$$m_\varphi(f,a) \leqq m_{\varphi\Phi\varphi}(f,a) \leqq \begin{Bmatrix} m_{\varphi\Phi}(f,a) \\ m_{\Phi\varphi}(f,a) \end{Bmatrix} \leqq m_{\Phi\varphi\Phi}(f,a) \leqq m_\Phi(f,a).$$

Die Funktion $m_\psi(f,x)$ ist in bezug auf φ halbstetig nach unten und M_ψ halbstetig nach oben, wenn φ und ψ nicht abnehmen und $\varphi\psi(A) = \psi(A)$ ist. Es folgen weitere Untersuchungen über die Grenzen; punktweis unstetige Funktionen; les ensembles supports d'une fonction $f(x)$, d. h. Mengen von der Art $E_x(f(x) < a)$; Funktionenfolgen; Relativgrenzen.

Reviewer: Kamke, E., Prof. (Tübingen)

Full Text: DOI Numdam EuDML