Birkhoff, G. D.
Sur le problème restreint des trois corps. (French) JFM 61.1480.03
Ann. Pisa (2) 4, 267-306 (1935).

Die Differentialgleichungen des restringierten Dreikörperproblems

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \Omega_x, \qquad \ddot{y} + 2\dot{x} = \Omega_y,$$

wobei $\Omega = \Omega(x, y, \mu) = \frac{1}{2}[(1-\mu)r_1^2 + \mu r_2^2] + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}$, $r_1^2 = (x-\mu)^2 + y^2$, $r_2^2 = (x - \mu + 1)^2 + y^2$, besitzen das *Jacobi*sche Integral

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2\Omega - C.$$

Diese Gleichungen werden für einen festen Wert von C $\left(> \sqrt[3]{32}\right)$ und kleine Werte von μ untersucht. Die vorliegende Arbeit verallgemeinert die Methoden und Ergebnisse einer früheren Arbeit des Verf. [Rend. Circ. Mat. Palermo 39, 265–334 (1915; JFM 45.1396.01)]. Die Grundlagen der Methode gehen auf *Poincaré* zurück: Man beginnt mit dem integrablen Fall $\mu = 0$ und benutzt analytische Fortsetzung. Das Haupthilfsmittel ist die Schnittfläche (surface of section), welche in der oben genannten Arbeit des Verf. behandelt worden ist.

Die Differentialgleichungen des Problems werden zuerst mit Hilfe der Transformation von *Thiele* und *Levi-Civita*

$$x - \mu = p^2 - q^2, \quad y = 2pq, \quad dt = 4(p^2 + q^2)d\tau$$

regularisiert; für die Bewegungszustände erhält man einen endlichen Raum S_3:

$$p'^2 + q'^2 - 2\Omega^*(p, q, \mu, C) = 0,$$
$$\Omega^*(p, q, \mu, C) = 2(2\Omega(\mu + p^2 - q^2, 2pq, \mu) - C)(p^2 + q^2),$$

der überall regulär und analytisch ist und analytisch von μ und C abhängt. S_3 ist homöomorph einem gewöhnlichen dreidimensionalen Raum, in welchem zwei Punkte (ξ, η, ζ) und (ξ', η', ζ') als identisch gelten, wenn

$$\frac{\xi'}{\xi} = \frac{\eta'}{\eta} = \frac{\zeta'}{\zeta} = -\frac{1}{\varrho} \text{ mit } \varrho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2.$$

Die transformierten Differentialgleichungen definieren eine permanente Bewegung von S_3 in sich ohne Gleichgewichtspunkt. Die Bewegung läßt das Volumenintegral $\iint m(Q)dQ$ mit

$$m(Q) = \frac{1}{\sqrt{2\Omega^* + 2\Omega_p^{*2} + 2\Omega_q^{*2}}}$$

invariant.

Im integrablen Falle $\mu = 0$ wird die definierende Gleichung für $S_3 p'^2 + q'^2 - 2h = 0$ mit $h = \Omega^*|_{\mu=0} = 2(p^2 + q^2)^3 + 4 - 2C(p^2 + g^2)$. Die Fläche $\sum_2 : pp' + qq' = 0$ im S_3 ist geschlossen, überall analytisch und homöomorph einem Torus . Durch die retrograde kreisförmige Bahn L_1 und die direkte kreisförmige Bahn L_2 wird sie in zwei ringförmige Teile S_2 und S_2' geteilt. Es werde gesetzt $\varrho = \pm\sqrt{p^2 + q^2}$, $\vartheta = 2 \operatorname{arctg} \frac{p}{q}$. a_1 und a_2 seien die Radien von L_1 und L_2. S_2 wird mit Hilfe der normalen Parameter ϱ, θ durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$p = \varrho \cos \tfrac{1}{2}\theta, \quad q = \varrho \sin \tfrac{1}{2}\theta, \quad p' = -\sqrt{2h} \sin \tfrac{1}{2}\theta, \quad q' = \sqrt{2h} \cos \tfrac{1}{2}\theta,$$

wobei $-\sqrt{a_1} \leqq \varrho \leqq \sqrt{a_2}$. Die Fläche S_2 ist die Schnittfläche und repräsentiert die Bewegungszustände, die tangential zu den Kreisbahnen liegen, wie sie für Werte $C^* \geqq C$ der *Jacobi*schen Konstante existieren. S_2 hat folgende Eigenschaften: Die beiden Ränder $\varrho = -\sqrt{a_1}$ und $\varrho = \sqrt{a_2}$ sind die retrograde und die direkte kreisförmige Bewegung. Eine Bewegung, welche in dem (x, y)-Koordinatensystem eine rotierende

Ellipse mit der großen Halbachse a ist, wird im S_3 eine Trajektorie, welche S_2 in jedem Intervall $\frac{\pi}{2}\sqrt{a}$ der Zeit τ schneidet. Alle solchen Trajektorien (außer L_1 und L_2) schneiden S_2 im gleichen Sinne unter einem Winkel, der immer von Null verschieden ist. In der Nähe der Ränder von S_2 ist dieser Winkel in $\varrho+\sqrt{a_1}$ bzw. $\varrho-\sqrt{a_2}$ von erster Ordnung. Sind $Q(\varrho,\theta)$ und $Q_1(\varrho_1,\theta_1)$ zwei aufeinanderfolgende Punkte, in denen eine Trajektorie S_2 schneidet, so gibt es eine Transformation

$$T:\varrho_1=\varrho,\quad \theta_1=\theta-2\pi a^{\frac{3}{2}}(\varrho)$$

von S_2 in sich, die überall eineindeutig und analytisch ist. Das Problem ist so für $\mu=0$ auf die Untersuchung von T zurückgeführt.

Im nichtintegrablen Falle $\mu>0$ hängen für kleine μ und festes $C(>\sqrt[3]{32})$ die kreisförmigen Bahnen L_1 und L_2 analytisch von μ ab und definieren Rotationszahlen $k_1(\mu,C)$, $k_2(\mu,C)$, die durch die Nullstellen der zu L_1 und L_2 gehörigen *Jacobi*schen Gleichungen gegeben sind. Die Funktionen $k_1(\mu,C)$, $k_2(\mu,C)$ sind analytisch in μ und C und reduzieren sich auf $2\pi(1-a_1^{\frac{3}{2}})$, $2\pi(1-a_2^{\frac{3}{2}})$ für $\mu=0$.

L_1^* und L_2^* seien die analytischen Fortsetzungen von L_1 und L_2 für den Wert C^* der *Jacobi*schen Konstanten und hinreichend kleine μ. Die Schnittfläche S_2 für $\mu>0$ und einen gegebenen Wert C ist definiert als diejenige Flächte, die die zu L_1 und L_2 tangentialen Bewegungen für $C^*\geqq C$ enthält. Sie ist überall analytisch und in folgender Weise durch die normalen Parameter ϱ und θ (wobei ϱ die Abszisse des Schnittpunktes von L_1^* oder L_2^* mit der p-Achse bedeutet und θ die mittlere Anomalie in τ, gemessen von der p-Achse) ausdrückbar:

$$p=\varrho(\cos\tfrac{1}{2}\theta+\varrho^2 f_2^*),\quad q=\varrho(\sin\tfrac{1}{2}\theta+\varrho^2 g_2^*),$$
$$p'=\frac{1}{a}\left(-2\sqrt{1-\mu}\sin\tfrac{1}{2}\theta+\varrho^2\bar{f}_2^*\right),\quad q'=\frac{1}{a}\left(2\sqrt{1-\mu}\cos\tfrac{1}{2}\theta+\varrho^2\bar{g}_2^*\right),$$

wo f_2^*, g_2^*, $\bar{f}_2^*$, $\bar{g}_2^*$ bzw. a analytische Funktionen von ϱ, θ, μ bzw. ϱ, ϱ_0, μ sind mit der Periode 4π in θ ($\varrho_0=$ Wert von ϱ für L_2). Der Parameterbereich für ϱ und θ ist durch die Ungleichungen

$$\varrho'\leqq\varrho\leqq\varrho'',\qquad 0\leqq\theta\leqq 2\pi$$

gegeben, wo ϱ', ϱ'' ($\varrho''=\varrho_0$) analytisch in $\frac{1}{\sqrt{C}}$ und μ sind.

S_2 besitzt die folgenden Eigenschaften: Jede Trajektorie (mit Ausnahme von L_1 und L_2) schneidet S_2 im gleichen Sinne. In der Nähe von L_1 und L_2 ist der Schnittwinkel von der ersten Ordnung in der Entfernung des Schnittpunktes von L_1 und L_2. Sind $P(\varrho,\theta)$ und $P_1(\varrho_1,\theta_1)$ zwei aufeinanderfolgende Punkte, in denen eine Trajektorie S_2 schneidet, so ist eine Transformation

$$T:\varrho_1=f(\varrho,\theta),\qquad \theta_1=\theta+g(\varrho,\theta)$$

von S_2 in sich definiert, welche überall eineindeutig und analytisch ist, sogar auf den Rändern L_1 und L_2 von S_2, vorausgesetzt, daß μ hinreichend klein ist. T läßt sich in der Form RU ausdrücken, wo R die Spiegelung $R(\varrho,\theta)=(\varrho,-\theta)$ ist und U eine zweite involutorische Transformation. L_1 und L_2 werden durch T mit den Rotationszahlen $k_1(\mu,C)$ bzw. $k_(\mu,C)$ ineinander transformiert.

Für hinreichend kleine μ ($\leqq\mu_1$) kann man kanonische Variablen ϱ^*, θ^* einführen, so daß T folgende Form erhält:

$$\varrho_1^*=\varrho^*+\tilde{F}_{\theta_1^*}(\varrho^*,\theta_1^*),\quad \theta^*=\theta_1^*+\tilde{F}_{\varrho_*}(\varrho^*,\theta_1^*),$$

wo $\tilde{F}$ analytisch in ϱ^*, θ_1^* ist und periodisch in θ_1^* mit der Periode 2π, außer auf L_1 und L_2, wo

$$\tilde{F}\equiv c+\varrho^*F_1(\sqrt{\varrho^*},\theta_1^*)\ \text{ bzw. }\ \tilde{F}\equiv d+(1-\varrho^*)F_2(\sqrt{1-\varrho^*},\theta_1^*)$$

gilt mit Funktionen F_1 und F_2 die analytisch von ihren Argumenten abhängen. F genügt der Gleichung

$$\tilde{F}(\varrho^*,\theta_1^*)-\tilde{F}(\varrho_1^*,-\theta^*)=(\varrho^*-\varrho_1^*)(\theta^*-\theta_1^*).$$

Für hinreichend kleine μ ($\leqq\mu_k$) kann die iterierte Transformation

$$T^k\qquad(k=\pm 1,\pm 2,\dots)$$

in folgender Form ausgedrückt werden:

$$\varrho_k^* = \varrho^* + \tilde{F}^{(k)}_{\theta_k^*}(\varrho^*, \theta_k^*), \quad \theta^* = \theta_k^* + \tilde{F}^{(k)}_{\varrho^*}(\varrho^*, \theta_k^*),$$

wobei

$$\begin{aligned}\tilde{F}^{(k)}(\varrho^*, \theta_k^*) &\equiv \tilde{F}(\varrho^*, \theta_1^*) + \cdots + \tilde{F}(\varrho_{k-1}^*, \theta_k^*)\\ &+ \varrho^*(\theta_1^* - \theta_k^*) + \varrho_1^*(\theta_2^* - \theta_1^*) + \cdots + \varrho_{k-1}^*(\theta_k^* - \theta_{k-1}^*).\end{aligned}$$

Es folgt dann, daß die Fixpunkte von T^k, für welche θ um $2l\pi$ wächst, (für $\mu \leqq \mu_k$) genau die kritischen Punkte der Funktion

$$\tilde{F}^{(k,l)}(\varrho^*, \theta^*) \equiv \tilde{F}^{(k)}(\varrho, \theta) + 2l\pi\varrho^*$$

sind.

Auf Grund dieser Ergebnisse ist, wie Verf. zeigt, für hinreichend große C und kleine μ die Existenz von solchen periodischen Bewegungen wahrscheinlich, die nicht symmetrisch in bezug auf die x-Achse, aber approximativ-symmetrisch in bezug auf die y-Achse sind und sich für $\mu = 0$ auf nichtsymmetrische Bewegungen reduzieren; eine endgültige Entscheidung dieser Frage erfordert die explizite Berechnung der Koeffizienten einer gewissen Potenzreihe.

Reviewer: Martin, M. H., Dr. (Maryland)

MSC:

70F07 Three-body problems

Keywords:

restricted three-body problem

Full Text: EuDML