Busemann, H.; **Feller, W.**
Zur Differentiation der Lebesgueschen Integrale. (German) JFM 60.0218.03
Fundamenta 22, 226-256 (1934).

Es sei R ein System meßbarer Mengen positiven Maßes, von denen sich auf jeden Punkt Q des Raumes eine Teilfolge $\varrho_1, \varrho_2, \dots = \{\varrho_\nu\}$ zusammenzieht. Die Arbeit behandelt dann die Frage: Welche Beschaffenheit haben diejenigen Systeme R, die für jede *Lebesgue*-integrable Funktion $f(P)$ in allen Punkten Q des Raumes, mit Ausnahme einer Nullmenge, die Gleichung $\lim_{\nu\to\infty} \frac{1}{m(\varrho_\nu)} \int_{\varrho_\nu} f(P)\, dP = f(Q)$ erfüllen? Die Antwort leutet verschieden für beschränkte und für nicht beschränkte Integranden: Für erstere bilden beispielsweise die achsenparallelen Intervalle ein solches System, für letztere nicht, was in den §§ 3, 4 bewiesen wird, was aber auch schon, wie die Verf. selbst bemerken, in dem Buch "Théorie de l'intégrale" von *S. Saks* (1933; F. d. M. 56_{I}, 266) enthalten ist. Im Falle beschränkter Integranden sind die gesuchten Mengensysteme identisch mit denen, für welche der sogenannte Dichtesatz gilt; dieser lautet: "Ist $\varkappa$ eine meßbare Menge und $\{\varrho_\nu\}$ eine sich auf Q zusammenziehende Folge aus R, so existiert in allen Punkten Q, abgesehen von einer Nullmenge, der Grenzwert $\lim_{\nu\to\infty} \frac{m(\varrho_\nu \varkappa)}{m(\varrho_\nu)} = 1$, wenn $Q \subset \varkappa$, und $\lim_{\nu\to\infty} \frac{m(\varrho_\nu \varkappa)}{m(\varrho_\nu)} = 0$ sonst." In den §§ 1, 2 werden daher allgemeine Kriterien für die Gültigkeit des Dichtesatzes gegeben und auf spezielle Mengen angewendet.

Reviewer: Bögel, K., Dr. (Halberstadt)

Full Text: DOI EuDML