zbMATH Open
THE FIRST RESOURCE FOR MATHEMATICS

Pontrjagin, L.

The theory of topological commutative groups. (English) JFM 60.0362.02

Annals of Math. 35, 361-388 (1934).

Die Untersuchung der Struktur der kommutativen kompakten topologischen Gruppen mit zweitem Abzählbarkeitsaxiom wird hier verknüpft mit derjenigen der diskreten abelschen Gruppe mit endlich oder abzählbar vielen Elementen.

K sei die Gruppe der Drehungen einer Kreislinie in sich. Ist $\mathfrak{G}$ eine diskrete abelsche Gruppe (mit höschstens abzählbar vielen Elementen), so verstehe man (für endliche $\mathfrak{G}$ in Übereinstimmung mit der üblichen Definition) unter einem Charakter von $\mathfrak{G}$ jede homomorphe Abbildung von $\mathfrak{G}$ in die Gruppe K hinein. Infolge der Gruppeneigenschaft von K bildet die Gesamtheit der Charaktere von $\mathfrak{G}$ eine Gruppe X, in der unter Benutzung der Topologie von K in naheliegender Weise ein Konvergenzbegriff definiert werden kann, durch den X zu einer kompakten topologischen Gruppe mit zweitem Abzählbarkeitsaxiom wird. - Ist umgekehrt X eine kommutative kompakte topologische Gruppe mit zweitem Abzählbarkeitsaxiom, so wird als Charakter von X jede stetige homomorphe Abbildung von X in die Gruppe K hinein bezeichnet. Die Charaktere von X bilden wieder eine Gruppe $\mathfrak{G}$, die als diskrete Gruppe aufgefaßt wird (daß $\mathfrak{G}$ höchstens abzählbar ist, wird bewiesen). In der Tat ist der Versuch, $\mathfrak{G}$ zu topologisieren, zwecklos, weil, wie Verf. im Anhang III zeigt, in $\mathfrak{G}$ konvergente Folgen nicht existieren können.

Der erste Hauptsatz der Arbeit lautet nun: Ist Ω eine kommutative kompakte topologische Gruppe, die dem zweitem Abzählbarkeitsaxiom genügt, $\mathfrak{G}$ die diskrete Gruppe der Charaktere von Ω, so ist die Gruppe der Charaktere von $\mathfrak{G}$ der Gruppe Ω stetig isomorph.

Zu diesem Ergebnis gelangt Verf. folgendermaßen: Die beiden Gruppen X und $\mathfrak{G}$ bilden "ein Paar", wenn jedem Paar von Elementen $\alpha \subset X, \mathfrak{x} \subset \mathfrak{G}$ ein Element γ von K als ihr "Produkt" $\gamma = \alpha\mathfrak{x}$ zugeordnet ist, derart daß (bei additiver Schreibweise der abelschen Gruppen) gilt:

$$(\alpha_1 - \alpha_2)\mathfrak{x} = \alpha_1\mathfrak{x} - \alpha_2\mathfrak{x}, \quad \alpha(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2) = \alpha\mathfrak{x}_1 - \alpha\mathfrak{x}_2.$$

Das Paar $X, \mathfrak{G}$ heißt "orthogonal", wenn es zu jedem von 0 verschiedenen Element α von X ein $\mathfrak{x}$ in $\mathfrak{G}$ mit $\alpha\mathfrak{x} \neq 0$ und zu jedem von 0 verschiedenen Element $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{G}$ ein α in X mit $\alpha\mathfrak{x} \neq 0$ gibt. Mit einfachen Hilfsmitteln kann man zeigen: Wenn X und $\mathfrak{G}$ ein orthogonales Paar bilden, so ist jede der beiden Gruppen Charaktergruppe der anderen; man erhält die Homomorphishmen von X bzw. $\mathfrak{G}$ in K durch $\mathfrak{x}(\alpha) = \alpha\mathfrak{x}$ bzw. $\alpha(\mathfrak{x}) = \alpha\mathfrak{x}$, wo $\alpha\mathfrak{x}$ die Produkte im Sinne der Paardefinition sind. - Um von hier aus zu dem ersten Hauptsazt zu gelangen, hat man also zu einer kompakten abelschen Gruppe Ω eine diskrete Gruppe $\mathfrak{G}$ zu konstuieren, die mit ihr ein orthogonales Paar bildet. Dazu wird auf Grund von Ergebnissen von *F. Peter*, *H. Weyl* (1927; F. d. M. 58, 387 (JFM 58.0387.*)-388), deren Anwendbarkeit auf kompakte topologische Gruppen mit zweitem Abzählbarkeitsaxiom durch *A. Haar* (1933; F. d. M. 59_{I}, 432) gesichert ist, gezeigt: In jeder kompakten kommutativen Gruppe Ω kann man ein endliches oder abzählbares System von komplexwertigen stetigen Funktionen $\mathfrak{g}_\nu(\xi)$ ($\nu = 1, 2, \dots; \xi \subset \Omega$) mit folgenden Eigenschaften definieren:

(1) $$|\mathfrak{g}_\nu(\xi)| = 1 : \quad \mathfrak{g}_\nu(0) = 1.$$

(2) $$\mathfrak{g}_\nu(\xi - \eta) = \mathfrak{g}_\nu(\xi)[\mathfrak{g}_\nu(\eta)]^{-1}.$$

(3). $$\text{Wenn } \xi \neq 0, \text{ gibt es ein } \mu \text{ mit } \mathfrak{g}_n u(\xi) \neq 1.$$

Definiert man jezt $\mathfrak{G}$ als die von den $\mathfrak{g}_\nu$ erzeugte multiplikative Gruppe der Funktionen

$$\mathfrak{g}(\xi) = [\mathfrak{g}_1(\xi)]^{m_1}[\mathfrak{g}_2(\xi)]^{m_2} \cdots [\mathfrak{g}_n(\xi)]^{m_n},$$

so bilden bei der Festsetzung

$$\alpha\mathfrak{g}(\xi) = \frac{\log \mathfrak{g}(\alpha)}{2\pi i} \pmod 1$$

die Gruppen $\mathfrak{G}$ und Ω ein Paar, das wegen (3) orthogonal ist.

In zwei Anhängen verfolgt Verf. die Beziehungen zwischen zwei Gruppen $\mathfrak{G}, X$, die Charaktergruppen voneinander sind, noch weiter: Anhang I handelt von den Zerlegungen der Beiden Gruppen in direkte Summen (hier werden u. a. einige Beispiele gebracht, die im Zusammenhang mit den Ergebnissen anderer Autoren von Interesse sind). Anhang II macht Aussagen über Zusammenhang und Dimension von X aus der gruppentheoretischen Struktur von $\mathfrak{G}$: Die Charaktergruppe X von $\mathfrak{G}$ ist dann und nur dann zusammenhängend, wenn $\mathfrak{G}$ kein Element endlicher Ordnung enthält; die Dimension von X ist gleich dem Rang der diskreten Gruppe $\mathfrak{G}$.

Um auch kommutative im Kleinen, aber nicht im Großen kompakte Gruppen der Untersuchung zugänglich zu machen, beweist Verf. - Gedankengängen von *O. Schreier* (Abhandlungen Hamburg 4 (1925), 15-32; 5 (1927), 233-244; F. d. M. 51, 112 (JFM 51.0112.*); 53, 110) folgend - den Satz: Jede kommutative im Kleinen kompakte zusammenhängende Gruppe Ω mit zweitem Abzählbarkeitsaxiom besitzt eine höchstens abzählbare Untergruppe A, so daß Ω/A kompakt ist. Dieser Weg führt dann zum

zweiten Hauptsatz: Jede kommutative im Kleinen kompakte zusammenhängende Gruppe Ω mit zweitem Abzählbarkeitsaxiom ist direkte Summe einer kompakten Untergruppe Δ und einer Vektorgruppe N (d. h. der additiven Gruppe von Vektoren eines affinen Raumes); Δ ist eindeutig bestimmt, und die Dimension von N ist eine Invariante der Gruppe Ω.

Setz man für Ω noch Zusammenhang im Kleinen voraus, so läßt sich dieser Satz verschärfen zum

dritten Hauptsatz: Jede kommutative zusammenhängende und im Kleinen kompakte Gruppe Ω ist direkte Summe von endlich oder abzählbar vielen kontinuierlichen zyklischen Gruppen und einer Vektorgruppe.

Reviewer: Pannwitz, Erika, Dr. (Berlin)

Cited in **1** Review
Cited in **38** Documents

Full Text: DOI