Leray, Jean
On the movement of a space-filling viscous liquid. (Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace.) (French) JFM 60.0726.05
Acta Math. 63, 193-248 (1934).

Eine Arbeit, die die modernen Methoden der Analysis dem Studium der *Stokes*schen Gleichungen der zähen Flüssigkeiten dienstbar macht. Das einleitende Kapitel enthält rein mathematische Hilfssätze, die an sich Interesse beanspruchen können. Anwendungen der *Schwarz*schen Ungleichheit, der Sätze von *Fischer* und *Riesz* über mittlere Konvergenz, des *Cantor*schen Diagonalverfahrens und des Begriffes der starken Stetigkeit. Alle Funktionen werden im ganzen Raum als vorhanden und über ihn als quadratisch integrabel vorausgesetzt, ferner für positive Werte der Zeit t. Die Geschwindigkeit habe ein endliches Maximum $V(t)$, die gesamte kinetische Energie W sei endlich, ebenso $J(t)$, das Integral über die Summe der Quadrate aller räumlichen Ableitungen der drei Geschwindigkeitskoordinaten. Bemerkenswert ist zunächst, daß solche Voraussetzungen imstande sind, die sonst in der Physik üblichen Annahmen über ein hinreichend starkes Verschwinden im Unendlichen vielfach zu ersetzen. Zwei Hilfsmittel sind nun noch wesentlich: einmal die auch sonst in der Hydrodynamik angewendete räumliche Mittelbildung mit einer geeigneten Belegfunktion über eine beliebig kleine Kugel, die aus jeder Funktion eine beliebig oft differenzierbare macht - durch Überstreichen gekennzeichnet - und zweitens der Begriff einer Quasiableitung und damit auch einer Quasidivergenz: $U_{,i}$ heißt Quasiableitung von U nach der Koordinate x_i, wenn für jedes differenzierbare a die Gleichung

$$\iiint \Big(U\frac{\partial a}{\partial x_i} - U_{,i}a\Big)dx_1dx_2dx_3 = 0$$

gilt, über den ganzen Raum erstreckt. Hat U eine Quasiderivierte, so ist deren Mittel die Ableitung des Mittels der Funktion U.

Im zweiten Kapitel wird nun zunächst die unendlich langsame Bewegung unter Einwirkung von Kräften studiert. Unter sehr weiten Voraussetzungen gelingt nach *Oseen*schen Methoden Existenz- und Eindeutigkeitsbeweis für alle Zeiten.

Im dritten Kapitel wird, wieder nach *Oseen*, die endliche Bewegung durch ein Verfahren der schrittweisen Verbesserung auf die unendlich langsame zurückgeführt. Vorausgesetzt wird reguläres Verhalten, auch im Angang. Aber die Regularität läßt sich nur für eine beschränkte Zeit beweisen. Wesentlich ist ein erstes Kriterium der Irregularität: Soll zu der Zeit T Irregularität eintreten, so muß

$$V(t) > A\sqrt{\frac{v}{T-t}}$$

sein, mit einem endlichen A. Es gibt noch ein zweites Kriterium für J. Entsprechende Regularitätskriterien.

Im vierten Kapitel Ausdehnung auf den Fall halbregulärer Anfangszustände: die Geschwindigkeiten haben starke Grenzwerte im Mittel für $t \to 0$, und das Zeit-Integral über V bleibt endlich. Die Quasidivergenz sei im Anfang Null. Auf solche Anfangswerte kann Existenz und Eindeutigkeit ausgedehnt werden.

Nun kommen die beiden wichtigsten Kapitel, die über turbulente Lösungen. Das sind, roh gesagt, Lösungen, die von Zeit zu Zeit ihren regulären Charakter verlieren können, aber doch zwar nicht die *Stokes*schen Gleichungen befriedigen, aber solche, die vermöge der Erklärung der Quasiableitungen ihnen äquivalent sind. Gewonnen werden die Lösungen in folgender Weise. Man ersetze in den *Stokes*schen Gleichungen bei den quadratischen Gliedern den einen Faktor, nämlich die Geschwindigkeiten durch ihre Mittel $\overline{u}$. Von diesen Gleichungen kann Verf. die Existenz von Lösungen für alle Zeiten beweisen, und zwar mit Hilfe des ersten oben genannten Kriteriums für Irregularität. Durch Grenzübergang der Kugel, über die gemittelt ist, werden die turbulenten Lösungen gewonnen. Von ihnen beweist Verf., daß sie abteilungsweise regulär sind, daß die Menge der Zeitpunkte, in denen sie es nicht sind, das Maß Null haben. Die Eindeutigkeit kann noch nicht bewiesen werden. Leider fehlt der Nachweis der Irregularität; es könnte sein, daß auch diese Lösungen in Wahrheit regulär sind. Immerhin kann Verf. auf Grund seiner Kriterien ein Differentialgleichungssystem angeben von der Beschaffenheit, daß die turbulenten Lösungen wirklich irregulär sind, wenn das zweite System reguläre Lösungen hat.

Es ist aber auf jeden Fall in dieser Arbeit die Existenz von Lösungen für alle Zeiten $t > 0$ dargetan.

Reviewer: Hamel, G., Prof. (Berlin)

MSC:

76Dxx Incompressible viscous fluids

Full Text: DOI Euclid

References:

[1] Ce mémoire a été résumé dans une note parue aux Comptes rendus de l'Académie des Sciences, le 20 février 1933, T. 196 p. 527.

[2] Les pages 59–63 de ma Thèse (Journ. de Math. 12, 1933) annoncent ce mémoire et en complètent l'introduction.

[3] Voir Hydrodynamik (Leipzig, 1927) {\S}7, p. 66. Acta mathematica T. 34. Arkiv för matematik; astronomi och fysik. Bd. 6, 1910. Nova acta reg. soc. scient. Upsaliensis Ser. IV, Vol. 4, 1917.

[4] l. c. Voir Hydrodynamik (Leipzig, 1927) 2, p. 59–60.

[5] l. c. Voir Hydrodynamik (Leipzig, 1927) 2, p 60–61. Je reviens sur ce sujet au {\S} 20 du présent travail (p. 224).

[6] Oseen, Hydrodynamik, {\S} 6, équation (I).

[7] Voir relations (5. 15), p. 240.

[8] Voir p. 241.

[9] Je me permets de citer le passage suivant de M. Oseen (Hydrodynamik): "A un autre point de vue encore il semble valoir la peine de soumettre à une étude attentive les singularités du mouvement d'un liquide visquex. S'il peut surgir des singularités, il nous faut manifestement distinguer deux especes de monvements d'un liquide visqueux les mouvements, réguliers, c'est-à-dire les mouvements sans singularité, et les mouvements irréguliers, c'est-à-dire les mouvements avec singularité. Or on distingue d'autre part en Hydraulique deux sortes de mouvements, les mouvements laminaires et les mouvements turbulents. On est dès lors tenté de présumer que les mouvements laminaires fournis par les expériences sont identiques aux mouvements réguliers théóriques et que les mouvements turbulents expérimentaux s'identifient aux mouvements irréguliers théoriques. Cette présomption répond-elle à la réalité? Senles des recherches ultéricures pourront en décider{".}

[10] En vertn du théoréme d'existence du {\S} 31 (p. 241) et du théorème du {\S} 18 (p. 222).

[11] Journal de Mathématiques, T. 13, 1934.

[12] Les conditions à l'infini par lesquelles nous caractérisons celles des équations de Navier que nous nommons régulières diffèrent des conditions qu'emploie M. Oseen.

[13] Thèse, Journal de Mathématiques 12, 1933; chaptitre IV p. 64–82. (On peut donner une variante intéressante au procédé que nous y employons en utilisant la notion d'état initial semirégulier qu'introduit le mémoire présent.)

[14] On peut dans ce cas baser l'étude du problème sur la propriété que possède alors le maximum du tourbillon à un instant donné d'être une fonction décroissante du temps. (Voir: Comptes rendus de l'Académie des Sciences, T. 194; p., 1893; 30 mai 1932).–M. Wolibner a lui aussi fait cette remarque.

[15] Voir: F. Riesz, Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen, Math. Ann. T. 69 (1910). Delsarte, Mémorial des Sciences mathématiques, fascicule 57, Les groupes de transformations linéaires dans l'espace de Hilbert.

[16] r représente la distance des pointsx ety.

[17] r' représente la distance des pointsx ety'.

[18] Ou forte.

[19] Voir: Oseen: Hydrodynamik {\S} 5; Acta mathematica T. 34.

[20] Le cas oùT=+n'est pas exelu.

[21] Rappelons que cette longueur a été introduite an {\S} 8 (p. 206), quand nous avons, défini le symbole \(\overline {U(x)}\) .

[22] Ils vaudront également pour les solutions régulières des équations de Navier.

[23] En d'autres termes nous utilisons le théorème de Helly.

[24] Cette suite partielle que nous choisissons est fonction de l'époquet 1 envisagéc.

[25] Je n'ai pu établir de théorème d'unicité affirmant qu'à un état initial donné correspond une solution turbulente unique.

[26] Rappelous que le symbole \{B; C\} nous sert à désigner la plus petite des quantitésB etC.