Ferrar, W. L.

Summation formulae and their relation to Dirichlet's series. (English) JFM 60.1013.01

Compositio Math., 1, 344-360 (1934).

Im Jahre 1904 gab *Voronoi* folgende Formel (F. d. M. 35, 320 (JFM 35.0320.*)):

$$\frac{1}{2}\sum_{a<n\leq b}\tau(n)f(n)+\frac{1}{2}\sum_{a\leq n<b}\tau(n)f(n)=\int_a^b f(x)\delta(x)dx+\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\int_a^b f(x)\alpha(nx)dx. \tag{1}$$

Hier ist $\tau(n)$ eine zahlentheoretische Funktion und $f(x)$ eine in $a\leq x\leq b$ stetige Funktion mit nur endlich vielen Maxima und Minima. Weiter sind $\delta(x)$ und $\alpha(x)$ analytische Funktionen, welche nur von der zahlentheoretischen Funktion $\tau(x)$ (also nicht von $f(x)$) abhängen. Eienen vollständigen Beweis gab *Voronoi* nur für den Fall, wo $\tau(n)$ die Anzahl der Teiler von n ist.

Verf. gibt (unter einigen voraussetzungen über die durch die *Dirichlet*sche Reihe

$$\psi(s)=\sum\tau(n)n^{-s}$$

dargestellte Funktion) für die rechte Seite von (1) folgenden Ausdruck:

$$\int_a^b f(x)dR(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau(n)}{n}\int_a^b f(x)d\{\alpha(nx)\}.$$

Die hier auftretenden *Stieltjes*-Integrale können im allgemeinen Falle nicht durch *Riemann*- oder *Lebesgue*-Integrale ersetzt werden. Es ist weiter $R(x)$ die Summe der Residuen der Funktion

$$s^{-1}\psi(s)x^s$$

in einem gewissen Streifen, und es ist

$$\alpha(y)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-b-i\infty}^{-b+i\infty}\frac{\psi(s)}{\psi(1-s)}\frac{y^s}{s}ds$$

(b ist eine positive Zahl, und es wird u. a. vorausgesetzt, daß $\psi(s)$ bis zur Geraden $\sigma=-b$ analytisch fortsetztbar ist). (III 8.)

Reviewer: Kloosterman, H. D., Dr. (Leiden)

Full Text: EuDML