Chevalley, C.
Sur la théorie du corps de classes dans les corps finis et les corps locaux. (French)
JFM 59.0190.01
Journal Faculty of Science Tokyo 2, 365-476 (1933).

An zusammenhängenden Darstellungen der Klassenkörpertheorie sind bisher gegeben: (1) die beiden Originalarbeiten von *Takagi* über die Theorie des relativabelschen Zahlkörpers und über das Reziprozitätsgesetz (1920-1922; F. d. M. 47, 147 (JFM 47.0147.*)-149; 48, 169); (2) der dreiteilige Bericht des Ref. (1930; F. d. M. 56_{I}, 165); (3) eine vervielfältigte kürzere Ausarbeitung von *Artin*schen Vorträgen (1932; F. d. M. 58); (4) eine vervielfältigte Ausarbeitung einer Vorlesung des REf. (1933; F. d. M. 59_{I}, 189). Die vorliegende Arbeit gibt eine neue ausführliche Gesamtdarstellung des Gebietes, und zwar ist sie die erste größere Veröffentlichung über diesen Gegenstand in französischer Sprache. Daher und in ihrer Eigenschaft als Thèse gibt sie erneut eine Darstellung ab ovo. Vorausgesetzt werden nur die Grundlagen der algebraischen Zahlentheorie (etwa die ersten sechs Kapitel des *Hecke*schen Buches) und die *Galois*che Theorie. Die ersten vier Kapitel bringen grundlegende Vorbereitungen (Gruppentheorie, Theorie der endlichen Körper, *Hilberts*che Theorie von Zerlegungs- und Trägheitskörper, Theorie der zyklischen und *Kummers*chen Körper, Theorie der Bewertungen und der $\mathfrak{p}$-adischen Zahlkörper) in

ausführlicher Darstellung mit teilweise neuartigen oder vereinfachten Beweisen. In den weiteren Kapiteln wird die eigentliche Klassenkörpertheorie behandelt, und zwar in einer gegenüber den genannten Veröffentlichungen nauartigen Fassung, die zu einer weitgehenden Vereinfachung und Vereinheitlichung des bisherigen Beweisschemas führt. Die Hauptpunkte dieser neuen Beweisanordnung sind:

I. Umkehrsatz, Isomorphiesatz und *Artins*ches Reziprozitätsgesetz werden zunächst nicht für die *Takagis*che Kongruenzidealgruppe bewiesen, sondern erst für die Gruppe der Ideale mit *Artin*-Symbol 1. Dieser Beweis läßt sich rein arithmetisch, ohne das transzendente Hilfsmittel der L-Funktionen führen.

II. Der dann zu erbringende Nachweis, daßdiese *Artins*che Idealgruppe mit der *Takagis*chen Kongruenzidealgruppe zusammenfällt, wird in zwei Schritten erbracht:

(a) für relative Kreiskörper; hierzu allein werden die transzendenten Hilfsmittel (L-Funktionen, *Dirichlet*-Dichte) gebraucht;

(b) allgemein; der Übergang von den relativen Kreiskörpern zum allgemeinen Fall läßt sich wieder in einfacher Weise rein arithmetisch vollziehen.

III. Der Existenzsatz wird erst zuletzt, gestützt auf den Umkehrsatz, Isomorphiesatz und *Artins*chen Reziprozitätssatz bewiesen. Das gehr dann durch eine rein arithmetische, sehr durchsichtige, abzählende Methode, die vom Verf. und *Herbrand* unabhängig gefunden wurde.

Neben der schon hervorgehobenen weitgehenden Zurückdrängung der transzendenten Hilfsmittel werden bei diesem Aufbau noch folgende sachlichen und methodischen Vereinfachungen gegenüber dem bisherigen Beweisschema erzielt:

Es ist nicht mehr erforderlich, den Fall des zyklischen Körpers von Primzahlgrad in den einzelnen Beweisen gesondert voranzustellen; vielmehr kann immer sofort der Fall des zyklischen Körpers von Primzahlpotenzgrad behandelt werden, der dann jedesmal durch triviale Zusammensetzung den Fall des beliebigen abelschen Körpers liefert. Entscheidend hierfür ist die Anwendung der von *Herbrand* stammenden Verallgemeinerung des *Minkowskis*chen Satzes über die Existenz einer galoisschen Gruppe angepaßten Einheitenbasis auf relativ-galoissche Zahlkörper und die Systematisierung gewisser gruppentheoretischer Schlußweisen durch ein allgemeines von *Herbrand* aufgestelltes Reduktionsprinzip. Besondere Einfachheit wird dabei auch erzielt durch vorläufigen Verzicht auf die Gewinnung des genauen Führers der *Takagis*chen Kongruenzidealgruppe; wie man nachträglich leicht rein arithmetisch zu diesem Führer und seinem Zusammenhang mit der Relativdiskriminante kommen kann, hat Ref. kürzlich gezeigt. Schließlich ergibt sich bei diesem Aufbau das *Artins*che Reziprozitätsgesetz von vornherein zusammen mit Umkehrsatz und Isomorphiesatz, wie es seiner Bedeutung nach naturgemäß ist, während man bisher einen besonderen Beweis dafür nachträglich anfügen mußte. Die *Tschebotaröw-Artins*che Methode der Durchkreuzung der gegebenen Klasseneinteilung mit der eines relativen Kreiskörpers wird dazu in der Weise ausgebaut, daß mit zwei Kreiskörpereinteilungen durchkreuzt wird.

Die Arbeit enthält noch eine neue direkte Begründung der Klassenkörpertheorie im Kleinen. Bisher war diese nur auf dem Umweg über die Klassenkörpertheorie im Großen entwickelt worden. Im Hinblick auf den elementaren Charakter der Theorie im Kleinen ist dies natürlich durchaus nicht naturgemäß, insbesondere nicht, da für die Theorie im Großen transzendente Hilfsmittel gebraucht werden. Die vom Verf. gegebene direkte Begründung der Theorie im Kleinen ist natürlich insbesondere frei von diesen transzendenten Hilfsmitteln.

Einige besonders hervorzuhebende Einzelheiten: Der Beweis des *Hilbert*schen Normensatzes für einen zyklischen Körper (aus $N(a) = 1$ folgt $A = B^{1-\sigma}$) wird vereinfacht. Darauf gestützt wird ein eleganter neuartiger Beweis des *Lagranges*chen Satzes von der Reinheit zyklischer Körper bei Einheitswurzeln im Grundkörper gegeben (da $N(\zeta) = 1$, ist $\zeta = A^{\sigma-1}$). Die Theorie der *Kummer*schen Körper wird sofort in folgender sehr zweckmäßiger und eleganter Verallgemeinerung entwickelt: $K = k(\sqrt[n]{\omega})$, wo ω nicht mehr notwendig nur eine einzelne Zahl, sondern gleich eine Zahlgruppe aus k von endlicher Basis in bezug auf die n-ten Potenzen aus k bedeutet; alle n-ten Wurzeln aus den Zahlen ω dieser Gruppe werden simultan adjungiert. Es wird ein neuer (vom Ref. stammender) Beweis für die Existenz einer Normalbasis bei relativ-galoisschen Körpern gebracht. Schließlich wird folgendes interessante Lemma über Normen aus zwei zyklischen Körpern K, K' vom Grade n gegeben: Ist α Norm aus K und aus K', so auch aus jedem zyklischen Teilkörper K'' von KK', der zu K und zu K' fremd ist. Dies Lemma hat, ebenso wie nach *E. Noether* der *Hilbert*sche Normensatz,eine einfache hyperkomplexe Deutung.

Reviewer: Hasse, H., Prof. (Göttingen)

Full Text: EuDML