Riesz, M.
Sur les ensembles compacts de fonctions sommables. (French) JFM 59.0276.01
Acta Szeged 6, 136-142 (1933).

Es sei R ein euklidischer Raum mit endlich vielen Dimensionen, x ein Punkt von R, dx das entsprechende Volumelement, $x+h$ das Ergebnis der auf den Punkt x angewendeten Verschiebung $h, |h|$ der in euklidischer Metrik gemessene absolute Betrag von h. Mit L^p wird, wie üblich, für ein festes $p \geqq 1$ die Klasse der in R definierten und meßbaren Funktionen bezeichnet, für welche das Integral

$$\int_R |f(x)|^p dx$$

existiert. Verf. setzt für eine solche Funktion

$$||f|| = ||f(x)|| = \left\{ \int_R |f(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \tag{1}$$

und

$$||f||_E = ||f(x)||_E = \left\{ \int_E |f(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}, \tag{2}$$

wenn E eine beliebige meßbare Teilmenge von R bedeutet. Die *Minkowski*sche Ungleichung

$$||f+g|| \leqq ||f|| + ||g|| \tag{3}$$

besagt, daß die Gesamtheit der betrachten Funktionen $f(x)$ durch (1) zu einem metrischen Raum gemacht wird. Ferner nennt Verf. eine positive Zahl M eine *Schranke* von $f(x)$, wenn

$$||f(x)|| \leqq M \tag{4}$$

ist. Unter diesen Festsetzungen gilt zunächst für jede Funktion $f(x)$ der Klasse L^p

$$\lim_{|h|\to 0} ||f(x+h) - f(x)|| = 0. \tag{5}$$

Das ist für $p=1$ eine bekannter *Lebesgue*scher Satz; der Beweis für $p=1$ überträgt sich aber ohne Weiteres auf den hier vorliegenden allgemeineren Fall $p \geqq 1$. Schließlich versteht Verf. unter E_A die Gesamtheit derjenigen Punkte von R, für die der Abstand von einem festen Punkt von R größer als A ist; dann gilt

$$\lim_{A\to\infty} ||f||_{E_A} = 0. \tag{6}$$

Nach *Fréchet* heißt eine Funktionmenge $\{f(x)\}$ aus der Klasse L^p "kompakt im Sinne L^p", wenn jede unendliche Teilmenge von $\{f(x)\}$ eine Folge enthält, die im Sinne L^p eine Grenzfunktion besitzt.

Den hauptsächlichen Gegenstand der vorliegenden Arbeit bildet der Beweis des folgenden Satzes: Eine Funktionenmenge $\{f(x)\}$ aus der Klasse L^p ist dann und nur dann im Sinne L^p kompakt, wenn die Beziehungen (4), (5) und (6) gleichmäßig für alle Funktionen der Menge $\{f(x)\}$ gelten. Vgl. dazu die Arbeiten von *A. Kolmogoroff*, "Über die Kompaktheit der Funktionenmengen bei der Konvergenz im Mittel" (Nachrichten Göttingen 1931, 60-63; F. d. M. 57) und *J. D. Tamarkin* "On the compactness of the space L_p" (Bulletin A. M. S. 38 (1932), 79-84; F. d. M. 58). (IV 7.)

Reviewer: Feigl, G., Prof. (Breslau)