Leray, J.
Étude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes de l'hydrodynamique. (French) JFM 59.0402.01
Journ. de Math. (9) 12, 1-82 (1933).

Verf. benützt die Methode von *E. Schmidt* und das Häufungsprinzip für Funktionen von *Arzelà* zur Untersuchung nichtlinearer Integralgleichungen, die im Wesentlichen den *Schmidt*schen Typ haben, im Großen. Sein Grundgedanke ist folgender:

Gegeben eine nichtlineare Aufgabe, die etwa von zwei Parametern, die in einem Bereich B variieren, abhängen möge. Zu jeder Lösung soll es eine Umgebung geben, in der die *Schmidt*sche Theorie gilt. Man wisse, daß alle vorhandenen Lösungen gleichmäßig beschränkt sind und bei Veränderung von h und k gleichgradig stetig bleiben. Dann konvergiert also jede einer Parameterfolge entsprechende Lösungsfolge gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion. Weiter sei bekannt, daß diese Grenzfunktion wieder Lösung der aufgabe ist. So kann man eine zu einem Ausgangswert der Parameter gehörige Lösung über den ganzen Bereich fortsetzen. Endlich kann nach dem *Borel-Lebesgue*schen Satz aus allen *Schmidt*schen Umgebungen eine endliche Anzahl ausgewählt werden, die die gesamte Mannigfaltigkeit überdeckt. Mit diesen endlich vielen Umgebungen beherrscht man also die Lösungen in ihrem Gesamtverlauf.

Die Schwierigkeit liegt natürlich darin, für spezielle Aufgaben nachzuweisen, daß die genannten Annahmen sämtlich erfüllt sind.

Verf. wendet das Verfahren auf eine Reihe von Problemen an:

(1) Die Integralgleichung

$$u(s) = h\int_0^1 K(s,t)u(t)dt + k\int_0^1 H(s,t,u(t))dt$$

mit

$$|K| \leqq A, \quad |H| \leqq B, \quad |K(s_1,t) - K(s_2,t)| \leqq \varepsilon(s_1 - s_2),$$
$$|H(s_1,t,u) - H(s_2,t,u)| \leqq \eta(s_1 - s_2)C(u),$$

wo $\varepsilon(s_1-s_2)$ und $\eta(s_1-s_2)$ mit s_1-s_2 gegen Null konvergieren, und $C(u)$ eine positive mit $|u|$ wachsende Funktion ist. Ferner soll H die Form

$$H = \sum_{p=0}^{\infty} H_p(s,t)(u-u_0)^p$$

haben. Dann ergibt sich, daß, falls h zwischen zwei Eigenwerten von K liegt, für alle k mindestens eine Lösung existiert. Wenn H nicht analitisch ist, so kann es durch analytische Funktionen approximiert werden, und es kann wieder nach dem *Arzelà*schen Theorem verfahren werden.

$$u(s) = h\int_0^1 K(s,t)F(u(t))dt = 0 \tag{2}$$

$K(s,t) + K(t,s)$ positiv definit. $F(u)$ analytisch und $|F(u)|$ beschränkt für alle Werte von u, für die $uF(u) < 0$ ist. $h \geqq 0$. Es existiert eine ungerade Anzahl von Lösungen.

(3) Problem von *Carleman*:

$$\Delta u = g(x,y,z), \quad \frac{du}{dn} = F(u).$$

Dasselbe wird in bekannter Weise auf eine nichtlineare Integralgleichung zurückgeführt, welche der Methode zugänglich ist.

(4) Randwertaufgabe für

$$\Delta u + a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = hF(u).$$

$F(u)$ analytisch, $-A < F(u)$ für $0 < u < \infty$, $\quad F(u) > A$ für $-\infty < u < 0$.

$$u(s) = h\int_0^1 K(s,t)F(u(t))dt + Kf(s) \qquad (f(s) \not\equiv 0). \tag{5}$$

$K(s,t)$ stetig. Es gebe ein stetiges positives f, so daß $\int_0^1 f(s)K(s,t)ds$ ein positives Minimum hat. $F(u)$ analytisch, $u^{-1}F(u) \to \infty$ für $u \to \infty$. Es wird gezeigt: In einem der beiden Bereiche $h > 0, \quad k > 0$ und $h > 0, \quad k < 0$ gibt es ein von Lösungen freis Gebiet.

(6) Die *Navier*schen Gleichungen

$$\mu\Delta u_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} = \varrho\sum_{k=1}^{3} u_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \varrho X_i + \varrho\sum_{k=1}^{3} A_{ik}u_k \qquad (i = 1,2,3),$$
$$\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0.$$

Sie werden nach *M. Odquist* auf Integralgleichungen zurückgeführt. Die Anwendbarkeit der Methode läuft im wesentlichen darauf hinaus, zu zeigen, daß gewisse Integrale über die Lösungen beschränkt bleiben. Dies wird durch längere Betrachtungen aus der Gleichung der Energiezertreuung gefolgert. Es folgen noch die entsprechenden Untersuchungen in der Ebene.

Reviewer: Hammerstein, A., Prof. (Kiel)

Full Text: EuDML