Ritt, J. F.; **Doob, J. L.**

Systems of algebraic difference equations. (English) JFM 59.0456.01

Amer. J. 55, 505-514 (1933).

Sei $\mathfrak{A}$ eine offene Menge in der komplexen Zahlenebene, die mit jedem Punkt x auch den Punkt $x+1$ enthält. Ferner sei $\mathfrak{F}$ eine Menge von in $\mathfrak{A}$ meromorphen Funktionen, die so beschaffen ist, daß mit $f(x)$ stets auch $f(x+1)$ und mit f, g stets auch $f \pm g, fg, \frac{f}{g}$ für $g \neq 0$ zu $\mathfrak{F}$ gehören. Dann werden algebraische Differenzengleichungssysteme behandelt mit Koeffizienten aus $\mathfrak{F}$ und mit beliebig vielen unbekannten Funktionen $y_1(x), \dots, y_n(x)$. Wenn alle (eventuell vorhandenen) Lösungeneines Systems $\sum_1$ zugleich Lösungen eines Systems $\sum_2$ sind, so sagt man, $\sum_2$ hält $\sum_1$.

Ein System $\sum$ heißt reduzibel, wenn es zwei Differenzengleichungen $G = 0$ und $H = 0$ gibt, von denen keine das System $\sum$ hält, während die Gleichung $GH = 0$ das tut. Andernfalls heißt $\sum$ irreduzibel. Hiernach ist z. B. die Gleichung

$$[y(x+1) - y(x)]^2 - [y(x+1) + y(x)] = 0 \tag{1}$$

reduzibel; denn ersetzt man x durch $x+1$ und subtrahiert die entstehende Gleichung von (1), so erhält man

$$[y(x+2) - y(x)][y(x+2) - 2y(x+1) + y(x) - 1] = 0, \tag{2}$$

und die Lösungen von (1) zerfallen in solche, die den ersten, und solche, die den zweiten Faktor von (2) zum Verschwinden bringen.

Es wird bewiesen, daß jedes System $\sum$ einer endlichen Menge von irreduziblen ystemen $\sum_i$ äquivalent ist; d. h. jede Lösung von $\sum$ ist auch Lösung von einem $\sum_i$, und jede Lösung eines $\sum_i$ ist auch Lösung von $\sum$. Dabei ist die Zerlegung in irreduzible Systeme, von Äquivalenz abgesehen, eindeutig.

Reviewer: Perron, O., Prof. (München)

Full Text: DOI