Orlicz, W.
Über unbedingte Konvergenz in Funktionenräumen. I, II. (German) JFM 59.1076.03
Studia 4, 33-37, 41-47 (1933).

Die Funktionen $f_\nu(x)$ mögen im Intervall $<0,1>$ zur *Lebesgue*schen Klasse L^α gehören. Ist dann die Reihe $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(x)$ in L^α (d. h. in bezug auf die Metrik im Funktionenraume L^α) unbedingt konvergent, so gilt der folgende Satz:

(a) Für $1 \leqq \alpha \leqq 2$ ist die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\int_0^1 |f_\nu(x)|^\alpha dx \right)^{\frac{2}{\alpha}},$$

(b) für $\alpha \geqq 2$ die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \int_0^1 |f_\nu(x)|^\alpha dx$$

konvergent.

(c) für $\alpha \geqq 1$ gilt

$$\int_0^1 \left[\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu^2(x) \right]^{\frac{\alpha}{2}} dx \leqq K.$$

Der Beweis von (c) ist elementar, für (a) werden zwei verschiedene Beweisanordnungen gegeben. Die zweite, die auch (b) liefert, beruht auf den folgenden Ungleichungen:

Sind $f_1(x)$ und $f_2(x)$ zwei Funktionen aus L^α, so gibt es eine Konstante M_α und ein passendes $\varepsilon = \pm 1$, so daß

a) für $1 < \alpha \leqq 2$

$$\left(\int_0^1 |f_1(x) + \varepsilon f_2(x)|^\alpha dx \right)^{\frac{2}{\alpha}} \geqq \left(\int |f_1(x)|^\alpha dx \right)^{\frac{2}{\alpha}} + M_\alpha \left(\int_0^1 |f_2(x)|^\alpha dx \right)^{\frac{\alpha}{2}},$$

b) für $\alpha \geqq 2$

$$\int_0^1 |f_1(x) + \varepsilon f_2(x)|^\alpha dx \geqq \int_0^1 |f_1(x)|^\alpha dx + M_\alpha \int_0^1 |f_2(x)|^\alpha dx$$

gilt. Als Anwendungen werden gebracht:

(1) Die linearen Dimensionen der Räume $L^\alpha (\alpha > 2)$ und L^1 sind unvergleichbar.

(2) Zwei verschiedene Räume $L^\alpha (\alpha > 1)$ sind nie isomorph.

Reviewer: Rogosinski, W., Prof. (Berlin)