Seifert, H.

Topologie dreidimensionaler gefaserter Räume. (German) JFM 59.1241.02

Acta Math. 60, 147-238 (1933).

Eine dreidimansionale Mannigfaltigtkeit F (im *Poincaré*schen Sinne) heißt ein *gefaserter* Raum, wenn in ihr ein System von einfach geschlossenen Kurven, den "Fasern", definiert ist derart, daß durch jeden Punkt von F eine und nur eine Faser hindurchgeht und noch eine gewisse Bedingung (s. unten) über die Umgebung der einzelnen Fasern erfüllt ist. Nicht jede Mannigfaltigkeit läßt sich fasern; aber man kennt viele Mannigfaltigkeiten, in denen die Faserung in natürlicher Weise gegeben ist: Diskontinuitätsbereiche von Bewegungsgruppen der dreidimensionalen Sphäre, in denen die Fasern als Bahnkurven einer kontinuierlichen Bewegungsgruppe der Hypersphäre erscheinen. Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist die Klassifikation der gefaserten dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten und Bestimmung eines vollständigen Invariantensystems solcher Mannigfaltigkeiten gegen "fasertreue" Abbildungen, d. h. topologische Abbildungen, die Fasern in Fasern überführen. Trotz der durch die Faserung bedingten Beschränkung der Mannigfaltigkeiten und der Abbildungen ergeben sich dabei wertvolle Beiträge zum Homöomorphieproblem der Mannigfaltigkeiten.

Ein "gefaseter Vollring" entsteht aus einem geraden Kreiszylinder des euklidischen Raumes, wenn man Grund- und Deckkreis des Zylinders, um einen rationalen Winkel $2\pi\frac{\nu}{\mu}$ gegeneinander verdreht, miteinander identifiziert, wobei die achsenparallelen Geraden des Zylinders die Fasern des Vollrings bilden. Dabei seien μ und ν teilerfremd; man erhält dann alle und nur die bei fasertreuer Abbildung wesentlich verschiedenen Typen von gefaserten Vollringen, wenn man noch $\mu > 0, 0 \leqq \nu \leqq \frac{1}{2}\mu$ vorschreibt. Der Fall $\mu = 1$, der "gewöhnliche" Vollring, nimmt hier eine Sonderstellung ein: in ihm sind alle Fasern einander homotop. Ist dagegen $\mu > 1$, so schließen sich immer μ von der Zylinderachse verschiedene Parallelen zu einer Faser zusammen, und jede dieser Fasern ist erst der μ-fach durchlaufenen mittleren Faser (die von der zylinderachse allein gebildet wird) homotop; die aus der Achse entstehende Faser ist hier eine "Ausnahmefaser" der "Vielfachheit" μ. - Die oben erwähnte Forderung, die an die Faserung von Mannigfaltigkeiten noch zu stellen ist, lautet nun: Jede Faser H besitzt eine (abgeschlossene) "Faserumgebung", die sich auf einen gefaserten Vollring fasertreu so abbilden läßt, daß H in die Achse übergeht. Die Invarianten μ, ν des Vollrings, auf den eine Faserumgebung von H abgebildet wird, hängen nur von H, nicht von der Faserumgebung ab. Ist $\mu > 1$, so heißt H eine Ausnahmefaser.

Die Fasern von F bilden auf Grund des Umgebungsbegriffs wieder eine topologischen Raum, und zwar infolge der Voraussetzung über die Faserumgebungen eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit, die "Zerlegungsfläche" f von F. Aus der Triangulierbarkeit der zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten folgt, auf dem Wege über f, die Trinagulierbarkeit der dreidimensionalen gefaserten Mannigfaltigkeiten. Die Punkte von f, die Ausnahmefasern von F entsprechen, heißen Ausnahmepunkte. Ist F geschlossen, so auch f, und umgekehrt, und Ausnahmepunkte bzw. - fasern können dann nur in endlicher Anzahl auftreten.

Jede Flache f ist Zerlegungsfläche einer gefaserten Mannigfaltigkeit F; man braucht nur $F = f\times$Kreis zu nehmen. Es gibt aber auch gefaserte Mannigfaltigkeiten, die nicht Produkträume sind, und i. a. kann die Zerlegungsfläche nicht, wie im Falle der Produkträume, in F durch eine Fläche, die von jeder Faser genau einmal getroffen wird, realisiert werden. Beispiel: In der Hypersphäre $\sum_{i=1}^{4} x_i^2 = 1$ sei die durch den Punkt y_1, y_2, y_3, y_4 hindurchgehende Faser betsimmt durch

$$x_1(t) = y_1 \cos mt + y_2 \sin mt, \qquad x_3(t) = y_3 \cos nt + y_4 \sin nt,$$
$$x_2(t) = -y_1 \sin mt + y_2 \cos nt, \quad x_4(t) = -y_3 \sin nt + y_4 \cos nt$$

$$(m, n \quad \text{ganz}; \quad (m,n) = 1; \quad 0 \leqq t \leqq 2\pi).$$

$x_3 = x_4 = 0$ liefert, falls $|m| \neq 1$, eine Ausnahmefaser mit

$$\mu = |m|, \quad \pm\nu \equiv n(\mathrm{mod}|m|), \qquad 0 \leqq \nu \leqq \frac{1}{2}m;$$

analog $x_1 = x_2 = 0$. Die Zerlegungsfläche ist stets eine Kugel, die aber jetzt nicht in der Hypersphäre realisiert werden kann.

F sei nunmehr *geschlossen*. Die allgemeine Untersuchung der gefaserten Mannigfaltigkeiten verläuft folgendermaßen: Bohrt man aus F die Faserumgebung einer Faser H aus, so entsteht ein berandeter gefaserter Raum $\bar{F}$, dessen Rand eine gefaserte Ringfläche $\bar{\pi}$ ist. $\bar{F}$ hängt nicht von der speziellen Wahl der Faserumgebung von H ab, und, wenn H eine gewöhnliche Faser ist, auch nicht von der Wahl von H. Man kann nun von $\bar{F}$ zu einer neuen geschlossenen Mannigfaltigkeit übergehen, indem man in $\bar{\pi}$ irgendwie einen gefaserten Vollring, einen "Verschlußring" V einheftet, derart, daß die Oberfläche π von V mit $\bar{\pi}$ durch eine fasertreue Abbildung identifiziert ist. Natürlich besteht in der Wahl von V eine Willkür: Zeichnet man auf $\bar{\pi}$ eine Homologieklasse aus, die weder die Nullklasse noch die der Fasern von $\bar{\pi}$ ist, so gibt es genau einen Vollring V, der sich mit seiner Oberfläche π fasertreu so in $\bar{\pi}$ einheften läßt, daß dabei der Meridiankreis von π (d. h. der in V berandende Kreis) der in $\bar{\pi}$ vorgeschriebenen Homologieklasse angehört; durch Auszeichnung der Homologieklasse von $\bar{\pi}$ ist die entstehende Mannigfaltigkeit eindeutig bestimmt. Insbesondere kann man - aber nicht in eindeutiger Weise - die ausgezeichnete Homologieklasse von $\bar{\pi}$ so wählen, daß V ein gewöhnlicher gefaserter Vollring wird. Durch Ausbohren der Ausnahmefasern und Einheften gewöhnlicher Verschlußringe kann man also eine gegebene F in eine Mannigfaltigkeit ohne Ausnahmefasern verwandeln. Bei diesem Prozeß bleibt die Zerlegungsfläche ungeändert.

Die Einteilung der gefaserten Mannigfaltigkeiten nach der Zerlegungsfläche leifert eine erste rohe Klassifikation. Es empfiehlt sich aber, eine feinere Einteilung vorzunehmen: H_0 sei eine willkürlich orientierte Faser von F, h_0 der entsprechende Punkt von f und ω ein geschlossener Weg durch h_0 auf f. Läßt man einen Punkt h von h_0 aus den Weg ω durchlaufen, und überträgt man dabei die Orientierung von H_0 stetig auf die entsprechenden Fasern H, so kann bei Durchlaufen von ω die Orientierung von H_0 erhalten bleiben oder sich umkehren; demgemäß werde dem Weg ω der "Wert" $+1$ oder -1 zugeordnet. Zusammenziehbare Wege und allgemeiner Wege, die der Kommutatorgruppe der Fundamentalgruppe von f angehören, erhalten natürlich den Wert $+1$, so daß die Bewertung nur von den Homologieklassen abhängt und durch endlich viele Werte (einer Homologiebasis) bestimmt ist. Zwei gefaserte Mannigfaltigkeiten gehören in dieselbe "Klasse", wenn sie dieselbe "bewertete Zerlegungsfläche" haben. Auch die bewertete Zerlegungsfläche ist gegen Ausbohren und Einheften von Verschlußringen invariant.

Die Gleichwertigkeit aller gewöhnlichen Fasern beim Prozeß des Ausbohrens hat zur Folge, daß, wenn man aus irgendeiner geschlossenen F ohne Ausnahmefasern mit gegebener bewerteter Zerlegungsfläche f eine Faser ausbohrt, stets derselbe berandete gefaserte Raum $\bar{F}_0$ entsteht; zu $\bar{F}_0$ gehört als Zerlegungsfläche eine einfach gelochte geschlossene Fläche $\bar{f}_0$. In Verbindung mit den genannten Ergebnissen über Ausbohren und Einheften von Verschlußringen erhält man: Jeder Klasse von geschlossenen gefaserten Mannigfaltigkeiten ist umkehrbar eindeutig ein von einer gefaserten Ringfläche $\bar{\pi}_0$ berandeter gefaserter Raum ohne ausnahmefasern, der "Klassenraum" $\bar{F}_0$, zugeordnet. Man erhält aus $\bar{F}_0$ alle geschlossenen Räume der Klasse, indem man eine beliebige Anzahl r von paarweise fremden Faserumgebungen ausbohrt und die $r+1$ Randringflächen auf alle möglichen Arten durch Verschlußringe schließt.

Die Bewertung einer Zerlegungsfläche kann willkürlich vorgeschrieben werden. Das erkennt man so: Aus einer kanonischen Zerschneidung der Zerlegungsfläche f zu einem Polygon erhält man durch Abschrägen der Ecken des Polygons eine Zerschneidung $\bar{f}_0^*$ der gelochten Fläche $\bar{f}_0$. Man bilde das Produkt $\bar{f}_0^* \times$Kreis und denke sich darin die Fasern mit vom Ort stetig abhängender Orientierung versehen. Welche Fasern beim Übergang vom Produkt $\bar{f}_0^* \times$Kreis zum Klassenraum $\bar{F}_0$ zi identifizieren sind, steht schon durch die Identifikation der Seiten von $\bar{f}_0^*$ zu $\bar{f}_0$ fest. Man hat aber auf jedem Seitenpaar zwei Möglichkeiten: gleichsinnig oder entgegengesetzt orientierte Fasern zu identifizieren, und das ermöglicht die Herstellung einer vorgeschriebenen Bewertung von $\bar{f}_0$; Einheften eines Verschlußringes in $\bar{F}_0$ ändert daran nichts. - Im Gegensatz zur Zerlegungsfläche der geschlossenen F läßt sich übrigens $\bar{f}_0$ im Klassenraum $\bar{F}_0$ immer realisieren. Bei orientierbarem $\bar{F}_0$ ist die Einbettung von $\bar{f}_0$ in $\bar{F}_0$ bis auf Deformationen eindeutig bestimmt; insbesondere ist dadurch auf $\bar{\pi}_0$ eine Klasse von Querkreisen, d. h. jede Faser genau einmal schneidenden Kurven, als Rand von $\bar{f}_0$ ausgezeichnet. Ist $\bar{F}_0$ nichtorientierbar, so unterscheiden sich die als Randkurven bei Einbettung von $\bar{f}_0$ auftretenden Querkreise um gerade Vielfache der Faser.

Ein vollständiges Invariantensystem der orientierbaren und *orientierten* gefaserten Mannigfaltigkeiten erhält man folgendermaßen: Die Bewertung der Zerlegungsfläche f liegt von vornherein fest; ist f orientierbar, so muß jeder Weg den Wert $+1$ erhalten; ist f nichtorientierbar, so erhalten alle und nur die Wege von f, längs deren sich die Orientierung auf f umkehrt, den Wert -1. Zur Kennzeichnung der bewerteten Zerlegungsfläche genügt es also, Orientierbarkeit bzw. Nichtorientierbarkeit und Geschlecht von f anzugeben. Damit ist der Klassenraum bestimmt. Symbole: O =Orientierbarkeit von F, o bzw. n =Orientierbarkeit bzw. Nichtorientierbarkeit von f, p =Geschlecht von f. Durch Angabe einer Zahl b wird eine eindeutig bestimmte Schließung von $\bar{F}_0$ zu einem Raum F_0 ohne Ausnahmefasern festgelegt: Bezeichnet H_0 die Faser, Q_0 den durch Einbettung von $\bar{f}_0$ in $\bar{F}_0$ ausgezeichneten Querkreis aus $\bar{\pi}_0$, beide bis auf eine gleichzeitige Umorientierung durch die Orientierung von $\bar{F}_0$ orientiert, so sei Q_0+bH_0 der (bis auf die Orientierung bestimmte) Meridiankreis des einzuheftenden Verschlußringes. Sind noch Ausnahmefasern - etwa in der Anzahl r - vorhanden, so kennzeichnen weitere r Zahlenpaare $\alpha_\varrho, \beta_\varrho$ $(\varrho = 1, 2, \dots r)$ mit $\alpha_\varrho > 1, 0 < \beta_\varrho < \alpha_\varrho$, $(\alpha_\varrho, \beta_\varrho) = 1$, wie die Verschlußringe in r willkürliche ausgebohrte Faserumgebung von F_0 einzusetzen sind: Ist H_ϱ die Faser, Q_ϱ der Meridiankreis des ausgebohrten Ringes, beide bis auf gleichzeitige Umorientierung durch die Orientierung von F_0 in bestimmter Weise orientiert, so sei $\alpha_\varrho Q_\varrho + \beta_\varrho H_\varrho$ der Meridiankreis des Verschlußringes. Dieses Invariantensystem wird durch das Symbol

$$(O, o \quad \text{bzw.} \quad n; \quad p|b; \quad \alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2; \dots; \alpha_r, \beta_r)$$

gekennzeichnet. - Ist eine orientierbare und orientierte F gegeben, so kann man umgekehrt unmittelbar o bzw. n und p daraus ablesen; die $\alpha_\varrho, \beta_\varrho$ und damit Q_ϱ sind, da ja ein Querkreis auf der Randringsfläche bis auf Vielfache der Faser bestimmt ist, durch die Ungleichungen für die α_ϱ und β_ϱ eindeutig festgelegt, die Q_ϱ bestimmen den Übergang zum Raum ohne Ausnahmefasern, und b ergibt sich wie oben durch den durch $\bar{f}_0$ ausgezeichneten Querkreis. - Kehrt man in F die Orientierung um, so geht in dem Invariantensystem b in $-r-b$, β_ϱ in $\beta_\varrho - \alpha_\varrho$ über; die übrigen Invarianten ändern sich nicht.

Im Falle der nichtorientierbaren gefaserten Mannigfaltigkeiten (Symbol N) liegen die Verhältnisse schwieriger. Ist f orientierbar (Symbol o), so kann man ein kanonisches Schnittsystem von f so auswählen, daß alle Kurven des Systems den Wert -1 haben; in diesem Fall genügt also zur Kennzeichnung der bewerteten Zerlegungsfläche wieder Angabe des Geschlechts p. Ist f nichtorientierbar, so sind drei Fälle möglich: (I) Alle Kurven von f haben den Wert $+1$ (Symbol nI). Anderfalls muß es einufrige Kurven vom Wert $+1$ und -1 geben; nimmt man als Fundamentalsystem ein Sytem von eiufrigen Rückkehrschnitten auf f, so können darunter einufrige Kurven mit dem Werte -1 (II) in ungerader Anzahl (Symbol $n\ II$) oder (III) in gerader Anzahl (Symbol $n\ III$) auftereten. Weitere Fälle treten nicht auf, da man durch geeignete Transformation immer erreichen kann, daß genau eine oder genau zwei Kurven des kanonischen Systems den Wert $+1$ erhalten. Die Zerlegugngsfläche wird also in diesem Fall durch Angabe des Geschlechts und eines der drei genannten Symbole gekennzeichnet. Der Fall $p = 0$ scheidet bei nichtorientierbarer F natürlich aus; für $p = 1$ kommt von den Fällen n nur nI, für $p = 2$ nur $n\ II$ in Frage. Im übrigen werden durch ähnliche Überlegungen wie oben die Abschließung des Klassenraums zu einem Raum ohne Ausnahmefasern durch eine Zahl b, die Ausnahmefasern durch Zehlenpaare α_χ, β_χ gekennzeichnet, wobei wegen des Fehlens der Orientierung aber die Ausnahmefasern der Vielfachheit 2 eine Sonderrolle spielen. Das Invariantensystem sieht so aus:

$(N$, o bzw. $n\ I$ bzw. $n\ II$ bzw. $n\ III$; $p|b$; $\alpha_1, \beta_1; \dots; \alpha_s, \beta_s; \alpha_{s+1}, \beta_{s+1}; \dots; \alpha_r, \beta_r)$.

Dabei entsprechen die α_χ, β_χ mit $\chi \leqq s$ den zweifachen Ausnahmefasern, so daß $\alpha_\chi = 2$, $\beta_\chi = 1$ wird, die mit $\chi > s$ den mehr als zweifachen Ausnahmefasern, wobei dann $\alpha_\chi > 2$ und $0 < \beta_\chi \leqq \frac{1}{2}\alpha_\chi$ ist. b ist nur dann von Bedeutung, wenn $s = 0$ ist, und dann ist $b = 0$ oder 1. Das beruht darauf, daß es im nichtorientierbaren Fall gleichgültig ist, wie man die zweifachen Ausnahmefasern in die Ausbohrungen (von denen eine der Rand von $\bar{F}_0$ sein kann) einsetzt, während es für Fasern höherer Vielfachheit wesentlich ist, von welcher der beiden Abschließungen des Klassenraums (die den beiden durch die Einbettung von $\bar{f}_0$ in $\bar{F}_0$ unterschiedenen Klassen von Querkreisen auf $\bar{\pi}_0$ entsprechen) man ausgeht.

Ein unverzweigter Überlagerungsraum einer gefaserten F ist selbst gefasert, falls die über den Fasern von F liegenden Kurven geschlossen sind. Es werden die Zusammenhänge zwischen beiden Faserungen untersucht, und im Falle der orientierten zweifachen überlagerung einer nichtorientierbaren F werden deren Invarianten aus denen von F bestimmt.

Aus den Invarianten eines gefaserten Raumes kann man seine Fundamentalgruppe berechnen; das geschieht auf dem Wege über eine geeignete Zerschneidung des Klassenraumes. Die Fundamentalgruppe von f ist eine Quotientengruppe der Fundamentalgruppe von F. Deshalb muß bei endlicher Fundamentalgruppe von F auch die von f endlich, also f die Sphäre oder die projektive Ebene sein; dann kann im zweiten Fall die Anzahl der Ausnahmefasern höchstens 1, im ersten höchstens 3 sein; für r=3 kann man genaue Aussagen über die Vielfachheiten der Ausnahmefasern machen. Die einzige geschlossene gefaserte F mit der Identität als Fundamentalgruppe ist die Hyperspäre mit den oben angegebenen Faserungen. Ferner ergibt sich folgendes Homöomorphiekriterium: Zwei gefaserte Räume mit der Kugel als Zerlegungsfläche und r ($\geqq 3$) Ausnahmefasern sind dann und nur dann homöomorph, wenn die Vielfachheiten der Ausnahmefasern paarweise übereinstimmen. - Auch die gefaserten *Poincaré*schen Räume (Homologiegruppe ist die Identität) müssen als Zerlegungsfläche die Kugel haben; sie besitzen wenigstens drei Ausnahmefasern, und die Vielfachheiten der Ausnahmefasern sind paarweise teilerfremd. Umgekehrt kann man, wenn Vielfachheiten diesen Bedingungen entsprechend vorgegeben werden, genau einen gefaserten *Poincaré*schen Raum mit Ausnahmefasern in vorgeschriebener Anzahl und Vielfachheit bestimmen. Ein *Poincaré*scher Raum ist also auf höchstens eine Weise faserbar. Der einzige gefaserte *Poincaré*sche Raum mit endlicher Fundamentalgruppe ist der Dodekaederraum. Die *Poincaré*schen Räume, die man nach dem *Dehn*schen Verfahren aus einem Torusknoten ableiten kann, sind dadurch gekennzeichnet, daß sie sich fasern lassen, mit drei Ausnahmefasern, zwischen deren Vielfachheiten die Beziehung $\alpha_3 = |q\alpha_1\alpha_2 - 1|$ (q ganz) besteht; man kann einen solchen Raum nur aus einem einzigen Torusknoten in eindeutig bestimmter Weise ableiten.

Wenn sich in einem gefaserten Raum F die Fasern mit eindeutig und stetig vom Ort abhängender Orientierung versehen lassen, d. h. wenn F der Klasse $O\ o$; p oder N, nI ; p angehört, kann man in F "Schiebungsgruppen" beleibiger endlicher Ordnung g definieren, die jede Faser in sich verschieben; sie sind zyklisch. Sind g und die Invarianten von F gegeben, so kann man die Invarianten des Diskontinuitätsbereichs der Gruppe bestimmen. Ist F ein gefaserter *Poincaré*scher Raum mit Ausnahmefasern der Vielfachheiten α_ϱ, so entsteht auf diese Weise dann und nur dann ein *Poincaré*scher Raum oder die Hypersphäre, wenn g ein Teiler von $\prod_\varrho \alpha_\varrho$ ist; die Vielfachheiten der Ausnahmefasern sind die von 1 verschiedenen unter den Zahlen $\alpha_\varrho/(\alpha_\varrho, g)$. Die Überlagerung ist verzweigt über denjenigen Ausnahmefasern, für die $(\alpha_\varrho, g) > 1$ ist. Durch Spezialisierung ergeben sich hieraus noch weitere Sätze über *Poincaré*sche Räume.

Ein Kriterium, das die Existenz nicht faserbarer Räume zu beweisen gestattet, erhält man so: Faßt man in einem gefaserten Raum eine Faser H und einen geschlossenen Weg W als Elemente der Fundamentalgruppe auf, so liefert Herumführen von H um W eine der beiden Relationen: $H = W^{-1}HW$ oder $H^{-1} = W^{-1}HW$. Nun kann man zeigen, daß, abgesehen von gewissen Fällen - der Hypersphäre und bestimmten angebbaren Faserungen von Linsenräumen -, eine gewöhnliche Faser niemals homotop 1 ist. Nicht faserbare Räume erhält man also, wenn man Räume angeben kann, die von den Ausnahmefällen verschieden sind (z. B. unendliche Fundamentalgruppe haben) und in deren Fundamentalgruppe kein Element mit der für H notwendigen Transformationseigenschaft vorkommt. Nun gibt es ein solches Element in dem freien Produkt zweier (von der Identität verschiedener) Gruppen dann und nur dann, wenn beide die Ordnung 2 haben, und Mannigfaltigkeiten, deren Fundamentalgruppe ein freies Produkt ist, kann man durch Zusammenheften zweier Mannigfaltigkeiten längs der Oberfläche je eines ausgebohrten Elements herstellen. Ein konkretes Beispiel einer nicht faserbaren Mannigfaltigkeit entsteht etwa durch Zusammenheften zweier Produkträume

Kreis$\times$Kugel.

Reviewer: Pannwitz, Erika, Dr. (Berlin)

Full Text: DOI